Задания к практическим занятиям

Раздел 1 Числовые множества

Тема 1 Множества

1 Какие элементы множества

$$A = \{-40; -32{,}4; -8; -\frac{1}{9}; 0; \frac{5}{7}; 6; 12; 19\frac{2}{9}; 30\}$$

являются натуральными числами, целыми числами, дробными, рациональными числами, отрицательными числами, неотрицательными числами?

2 Составьте подмножества множества

$$B = \{-24; -23\frac{1}{3}; -22; -9; 0; \frac{1}{5}; 2; 5; 9; 10; 12; 24\},$$

элементами которых являются □, □, нечетные, четные числа, отрицательные числа, числа кратные 4.

3 Какие из следующих утверждений $\square \subset \square$, $\square \subset \square$, $\square \subset \square$, $\square \subset \square$ справедливы?

4 Укажите пустые множества среди:

а) множество целых корней уравнения $x^2 - 16 = 0$;

б) множество целых корней уравнения $x^2 + 16 = 0$;

в) множество натуральных чисел, меньших 1.

5 Найдите пересечение, объединение, разность множеств из упражнения 1 и 2.

6 Найдите пересечение, объединение, разность множеств

$$A = \left\{ \frac{1}{3^n} \middle| \ n \in \square \right\} \text{ и } B = \left\{ \frac{1}{10^n} \middle| \ n \in \square \right\}.$$

7 Доказать, что $\sqrt{3}$ – иррациональное число.

8 Докажите, что любую периодическую десятичную дробь, не имеющую цифры 9 в периоде, можно получить как результат деления двух натуральных чисел.

9 *Доказать, что* $0{,}6(9) = 0{,}7(0)$.

Пример оформления решения

1 Найдите пересечение, объединение, разность множеств $A=\left\{ \frac{1}{5^n} \middle| \ n \in \mathbb{N} \right\}$ и $B=\left\{ \frac{1}{25^n}, \middle| \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Решение. Поскольку

$$A=\left\{ \frac{1}{5};\frac{1}{25};\frac{1}{125};\frac{1}{625};\ldots \right\} \text{ и } B=\left\{ \frac{1}{25};\frac{1}{625};\frac{1}{15625};\ldots \right\},$$

то

$$A\cap B=\left\{ \frac{1}{25};\frac{1}{625};\ldots \right\}=B,\ A\cup B=\left\{ \frac{1}{5};\frac{1}{25};\frac{1}{125};\frac{1}{625};\ldots \right\}=A,$$

$$A\setminus B=\left\{ \frac{1}{5};\frac{1}{125};\ldots \right\}=\left\{ \frac{1}{5^{2k-1}} \middle| \ k\in \mathbf{N} \right\},\ B\setminus A=\varnothing.$$

2 Доказать, что $\sqrt{2}$ – иррациональное число.

*Решение***.** Доказываем методом от противного. Допустим, что существует такое рациональное число $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь), квадрат которого равен 2. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$ или $m^2=2n^2$. Следовательно, число m^2 есть четное число. Отсюда и m есть четное число. Если m – четное, то оно представимо в виде $m=2k$. Тогда имеем $n^2=2k^2$. Следовательно, n^2 есть четное число, тогда и n – четное. Таким образом, числа m и n являются четными. Поэтому дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что противоречит предположению. Допущение не верно, т.е. не существует рационального числа, квадрат которого равен 2, а, значит, $\sqrt{2}$ – иррациональное число, $\sqrt{2}=1{,}41421356\ \ldots$.

3 Доказать, что $0{,}4(9)=0{,}5(0)$.

Решение. Пусть $x=0{,}4(9)$.

Тогда $100x-10x=49,(9)-4(9)=45$.

Откуда $x=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}=0{,}5=0{,}5(0)$

Тема 2 Грани числовых множеств

1 Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2 Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого $x > -1$ справедливо неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

3 Доказать, что для любых положительных чисел $y_1, y_2, \ldots y_n$, удовлетворяющих условию $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = 1$, имеет место неравенство: $y_1 + y_2 + \ldots y_n \geq n$.

4 Доказать неравенство для $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

5 Докажите, что множество всех чисел вида $\frac{m}{n}$, где $n, m \in \mathbb{N}$ и $n-$ четное, не имеет наименьшего элемента. Найдите точную нижнюю грань множества.

6 Пусть $A-$ множество чисел, противоположных по знаку чисел из множества B. Докажите, что

$$\sup A = -\inf B, \ \inf A = -\sup B.$$

Пример оформления решения

1 Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $n \leq 2^{n-1}$.

Решение. При $n = 1$ неравенство верно т.к. $1 \leq 1$. Предположим, что неравенство верно для $k \in \mathbb{N} : k \leq 2^{k-1}$. Неравенство верно для $(k+1)$, так как

$$2^k = 2^{k-1} \cdot 2 \geq 2 \cdot k \geq k + 1.$$

Последнее неравенство следует из очевидного неравенства: $(k-1)^2 \geq 0$.

Следовательно, неравенство $n \leq 2^{n-1}$ верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

2 Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. При $n=1$ равенство очевидно.

Предположим, что оно верно для натурального числа k:

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Проверим верность утверждения для следующего натурального числа $(k+1)$:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=$$

$$=(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Следовательно, утверждение верно для любого $n\in\mathbb{N}$.

3 Найти точную верхнюю грань интервала $(0,1)$.

Решение. Так как для любого $x\in(0;1)\Rightarrow x<1$, то число 1 является верхней гранью. Покажем, что это точная верхняя грань, т.е. для любого $\bar{x}<1\ \exists\ a\in(0,1): a>\bar{x}$.

Действительно, если $\bar{x}\le 0$, то $\forall a\in(0;1): a>x$. Если $\bar{x}>0$, то на интеграле $(\bar{x};1)$ существует действительное число a: $\bar{x}<a<1$, т.е. $a>\bar{x}$.

Таким образом, для числа 1 выполнены оба условия определения точной грани $\sup(0;1)=1$ $(\sup(0;1)\notin(0;1))$.

4 Найти точные грани множества всех правильных рациональных дробей $\frac{m}{n}$ и показать, что это множество не имеет наименьшего и наибольшего элементов.

Решение. *Шаг 1.* Пусть $X=\left\{\frac{m}{n}\Big|\ m,n\in\mathbb{N}, m<n\right\}$. Так как $\frac{m}{n}>0$, $\forall m,n\in\mathbb{N}$, то 0 – нижняя грань множества X. Более того, $\forall\bar{x}>0$, так как, если $\bar{x}\ge 1$, то $a=\frac{1}{2}$ удовлетворяет условию $a<\bar{x}$. Если $0<\bar{x}<1$, то число $\bar{x}$ можно записать в виде бесконечной десятичной дроби: $\bar{x}=0,x_1,x_2\ldots x_k\ldots$, причем $\exists x_n : x_n \neq 0$.

Рациональное число $a=0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}(x_n-1)$ удовлетворяет условию $0<a<\bar{x}<1$, т.е. является правильной рациональной дробью и $0<\bar{x}$. Следовательно, для числа 0 выполнено определение точной, нижней грани: $\inf X=0$. При этом $\inf X \notin X$, так как $\dfrac{0}{n}\notin X$, $0-$ не натуральное число и поэтому множество не имеет наименьшего элемента.

Шаг 2. Так как X содержит только правильные дроби, то $\dfrac{m}{n}<1$, то число 1 – верхняя грань множества X. Более того, $\forall \bar{x}<1 \quad \exists \dfrac{m}{n}\in X : \dfrac{m}{n}>\bar{x}$. Действительно, $\exists$ рациональное число $x_1=\dfrac{m}{n} : \bar{x}<x_1<1$. Значит, $x_1\in X$ и для числа 1 выполнены оба условия определения точной верхней грани. Следовательно, $\sup X=1$. Но $\sup X \notin X$, т.к. $\dfrac{m}{n}=1$ при $m=n$, что противоречит определению правильной дроби. Поэтому множество X не имеет наибольшего элемента.

Тема 3 Множество комплексных чисел

1 Найти z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$, z_1/z_2 для z_1 и z_2:

а) $z_1=2+3i$; $z_2=3-5i$; в) $z_1=2+i$; $z_2=1-2i$;

б) $z_1=5-2i$; $z_2=2+3i$; г) $z_1=\dfrac{-1+i}{-1-i}$; $z_2=2i$.

2 Вычислить:

а) $\dfrac{1}{i}$; б) $\dfrac{1-i}{1+i}$; в) $\dfrac{2}{1-3i}$; г) $\dfrac{-2-i}{1+2i}$.

3 Представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить числа на плоскости □ комплексные числа:

а) $z=3i$; г) $z=-3-3i$;

б) $z=-2$; д) $z=-1+2i$;

в) $z=1-i$; е) $z=1$.

4 Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ следующие множества:

а) $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z \right\}$; г) $\left\{ z \in \mathbf{C} \;\middle|\; |z - 1 - i| \le 4 \right\}$;

б) $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re} z > 0 \right\}$; д) $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left| \dfrac{z-1}{z+1} \right| \le 1 \right\}$;

в) $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \arg z = \dfrac{\pi}{4} \right\}$; е) $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 \le \operatorname{Im} z \le 1 \right\}$.

5 Вычислить:

а) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$; в) $(-1+i)^{10}$; д) $\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^{25}$;

б) $(1-i)^{100}$; г) $\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{24}$; е) $(3+4i)^3$.

6 Найти все значения корня:

а) $\sqrt{\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}}$; б) $\sqrt[3]{-i}$; в) $\sqrt[4]{16}$; г) $\sqrt[3]{-1+i}$.

7 Решить уравнение:

$$(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i .$$

8 Решить уравнение: $\bar{z} = z^2$.

П р и м е р о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - i$; $z_2 = -2 + 3i$. Найти $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Р е ш е н и е. Используя правила суммы, разности, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме, получим:

$$z_1 + z_2 = (1-i) + (-2+3i) = (1-2) + i(3-1) = -1 + 2i ,$$

$$z_1 - z_2 = (1-i) - (-2+3i) = 1 - i + 2 - 3i = 3 - 4i ,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1-i)\cdot(-2+3i) = -2 + 2i + 3i - 3i^2 =$$

$$= -2 + 2i + 3i + 3 = 1 + 5i ,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(1-i)\cdot(-2-3i)}{(-2+3i)\cdot(-2-3i)} = \frac{-2+2i-3i-3}{4+9} =$$

$$= \frac{-5-i}{13} = -\frac{5}{13} - i\frac{1}{13} .$$

2 Представить комплексные числа $z=-1+i$, $z=-4$, $z=i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. При решении используем определения модуля и аргумента комплексного числа.

Для комплексного числа $z=-1+i$ имеем $x=-1$; $y=1$. Тогда модуль равен

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}\ .$$

Так как

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

то аргумент $\operatorname{Arg} z=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Отсюда главное значение аргумента $\arg z=\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

Следовательно, число $z=-1+i$ в тригонометрической форме запишется в виде

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

а в показательной – $z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Аналогично для комплексного числа $z=-4$ имеем:

$x=-4$; $y=0$ $\Rightarrow$ $r=4$, $\arg z=\varphi=\pi$; $\Rightarrow$

$$z=4(\cos\pi+i\sin\pi)=4\mathrm{e}^{i\pi}\ .$$

Для комплексного числа $z=i$ имеем $x=0$; $y=1$ и

$$r=1,\ \arg z=\varphi=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{i\frac{\pi}{2}}\ .$$

3 Вычислить $\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{10}$

Решение. Представим $z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ в тригонометрической форме. Так как $x=-\sqrt{2}$; $y=\sqrt{2}$, то

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2\ ,$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\ \arg z=\varphi=\frac{3\pi}{4}\ .$$

Тогда $z = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Подставляя в формулу $z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$, получим:

$$z^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{3\cdot 10}{4}\pi + i\sin\frac{3\cdot 10}{4}\pi\right) = 2^{10}\left(\cos\frac{15}{2}\pi + i\sin\frac{15}{2}\pi\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(7\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(7\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^{10}\left(0 - i\right) = -2^{10}\,i\,.$$

4 Найти все значения корня $\sqrt[5]{1-i}$ и изобразить их в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Решение. Для комплексного числа $z = \sqrt[5]{1-i}$ имеем:

$$r = \sqrt{2}\,;\ \arg z = -\frac{\pi}{4},\ \Rightarrow\ z = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

По формуле Муавра получим:

$$\sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5}\right)\quad k = 0,1,2,3,4\,.$$

При $k = 0$ имеем $z_0 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{20} - i\sin\dfrac{\pi}{20}\right)$,

при $k = 1$ имеем $z_1 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{20} + i\sin\dfrac{7\pi}{20}\right)$,

при $k = 2$ имеем $z_2 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$,

при $k = 3$ имеем $z_3 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{23\pi}{20} + i\sin\dfrac{23\pi}{20}\right)$,

при $k = 4$ имеем $z_4 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{31\pi}{20} + i\sin\dfrac{31\pi}{20}\right)$.

Точки z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 являются вершинами правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[10]{2} \approx 1{,}072$ с центром в начале координат (рисунок 1. 1). Полярный угол точки

z_0 равен $\varphi_0 = -\pi/20$, а полярные углы остальных точек получаются последовательным прибавлением угла $2\pi/5$ к φ_0, т.е. $\varphi_k = \varphi_0 + \dfrac{2\pi k}{5}$ при $k = 1,2,3,4$.

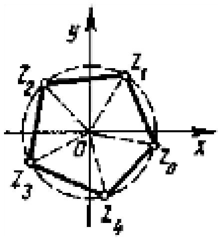

Рисунок 1. 1 – Корни комплексного числа $\sqrt[5]{1-i}$

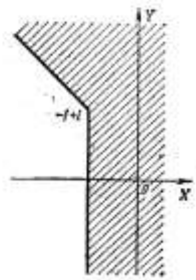

Рисунок 1. 2 – Множество G

5 Изобразить на плоскости $\mathbb{C}$ множество

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \le \arg\left(z+1-i\right) \le \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Решение. Комплексное число $z_1 = z+1-i = z-\left(-1+i\right)$ изображается вектором, началом которого является точка $-1+i$, а концом – точка z. Угол между этим вектором и осью Ox есть $\arg\left(z+1-i\right)$, и он меняется в пределах от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{3\pi}{4}$. Следовательно, данное неравенство определяет угол между прямыми, выходящими из точки $-1+i$ и образующими с осью Ox углы в $-\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{4}$. Данное множество G изображено на рисунке 1. 2.

Раздел 2 Теория пределов

Тема 1 Числовые последовательности

1 Напишите пять первых членов каждой из следующих последовательностей:

а) $x_n = \dfrac{1}{2n+1}$; г) $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$, при $n > 1$;

б) $x_n = \dfrac{n+2}{n^3+1}$; д) $a_1 = 1,\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2}$, при $n > 1$;

в) $x_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$; е) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$.

Какие из данных последовательностей являются ограниченными сверху, ограниченными снизу, ограниченными, монотонными?

2 Найти формулу для общего члена следующих последовательностей:

а) члены с четными номерами равны 1, а члены с нечетными равны -1;

б) членами последовательности являются корни уравнения $\cos \pi x = 0$.

3 Может ли быть монотонной последовательностью:

а) сумма двух немонотонных последовательностей;

б) произведение двух немонотонных последовательностей?

4 Доказать по определению, что последовательности

а) $x_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, б) $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$, в) $x_n = 2^{-n}$.

являются бесконечно малыми.

5 Доказать по определению, что последовательности

а) $x_n = \ln(n+1)$, б) $x_n = 2^{2n+1}$, в) $x_n = (-1)^n n$.

являются бесконечно большими.

П р и м е р о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Напишите пять первых членов из следующих последовательностей:

а) $x_n = (-1)^{n-1} \dfrac{n+1}{n^2}$;

б) числа Фибоначчи $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$;

в) $y_n = \begin{cases} -n, \text{ если } n - \text{простое число}, \\ -n^2, \text{если } n - \text{составное число}. \end{cases}$

Какие из данных последовательностей являются ограниченными сверху, ограниченными снизу, ограниченными, монотонными?

Решение. а) для последовательности $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$ имеем $x_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{3}{4}$, $x_3 = \dfrac{4}{9}$, $x_4 = -\dfrac{5}{16}$, $x_5 = \dfrac{6}{25}$.

Поскольку $|x_n| = \left|(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}\right| = \dfrac{n+1}{n^2} \le 2$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то последовательность является ограниченной.

Так как $x_3 > x_4$ и $x_4 < x_5$, видно, что определение монотонности не выполняется. Значит, последовательность $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$ не является монотонной.

б) для чисел Фибоначчи имеем: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_2 + x_1 = 2$, $x_4 = x_3 + x_2 = 3$, $x_5 = x_4 + x_3 = 5$.

Поскольку $x_n \ge 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то последовательность ограничена снизу, но неограничена сверху. При этом $x_n \le x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Значит, числа Фибоначчи образуют неубывающую последовательность.

в) для последовательности (y_n) получим: $y_1 = -1$, $y_2 = -2$, $y_3 = -3$, $y_4 = -16$, $y_5 = -5$.

Данная последовательность ограничена сверху числом -1, но неограничена снизу. Она не является монотонной, так как $y_4 < y_3$ и $y_4 < y_5$.

2 Доказать по определению, что последовательность $\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{6}; \ldots\right)$ является бесконечно малой последовательностью.

Решение. Возьмем произвольное малое число $\varepsilon > 0$. Так как $\left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$, то для нахождения значений n, удовлетворяющих этому неравенству, достаточно его решить. Поскольку $n \in \mathbb{N}$, то $\dfrac{1}{2n} < \varepsilon$. Решая данное неравенство, получим $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$. Следовательно, в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\frac{1}{2n}$: $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$.

Тогда неравенство $\left|\frac{1}{2n}\right|<\varepsilon$ будет выполнятся при всех номеров n, больших чем $N(\varepsilon)$.

Например, пусть $\varepsilon=0{,}1$. Тогда $N(\varepsilon)=\frac{1}{2\cdot 0{,}1}=5$.

Начиная с шестого номера все члены последовательности $\left(\frac{1}{2n}\right)$ меньше $\varepsilon=0{,}1$.

3 Доказать по определению, что последовательность $(n^2)=(1;4;9;...)$ является бесконечно большой.

Решение. Возьмем произвольное число $c>0$. Из неравенства $|x_n|>c$ найдем $N(c)$:

$$n^2>c \;\Rightarrow\; n>\sqrt{c}.$$

Возьмем за $N(k)$ целую часть числа $\sqrt{c}$: $N(k)=1+\left[\sqrt{c}\right]$. Тогда для всех номеров n, больших чем $N(c)$, выполняется неравенство $n^2>c$.

В частности, для $c=0{,}16$ имеем $N(c)=1+\left[\sqrt{0{,}16}\right]=1$. Значит, для всех членов последовательности, начиная со второго номера, выполняется неравенство $n^2>c$. Если $c=12$, то $N(c)=1+\left[\sqrt{12}\right]=4$ и неравенство верно $\forall n>4$.

4 Является ли неограниченная последовательность бесконечно большой?

Решение. Рассмотрим последовательность

$$(x_n)=(1,0,2,0,3,0,4,0,\ldots).$$

Данная последовательность является неограниченной, поскольку для любого $A\in\mathbb{R}$ найдется элемент последовательности (x_n), для которого $x_n>A$. Однако она не является бесконечно большой, так как это неравенство не выполняется для любого $n\in\mathbb{N}$. Поэтому не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

Тема 2 Предел последовательности

1 Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, указав для каждого положительного числа ε такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n \ge N(\varepsilon)$ элементы x_n последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - 1| < \varepsilon$, если x_n равно:

а) $\dfrac{2n+1}{n} - 1$;   в) $1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$;

б) $1 + \dfrac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}$;   г) $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$.

2 Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}8)^n = 0$;   б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n + 5\cdot 6^n}{3^n + 6^n} = 5$.

3 Докажите, что последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ расходится.

4 Докажите, что число $a = -1$ не является пределом последовательности $x_n = \cos\pi n$.

5 Докажите по определению, что последовательность $x_n = 2^{\sqrt{n}}$ имеет бесконечный предел при $n \to \infty$.

6 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-1}{2n+3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n}{n^2+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{5n^2+4n-1}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n]{2}\right)$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+3+5+\ldots+n}$

к) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

л) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$;

м) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-5}\right)^{3n+1}$;

н) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n-5}\right)^{3n+1}$;

о) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{2n-5}\right)^{3n+1}$; п) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\dfrac{1}{n}}$.

П р и м е р ы   о ф о р м л е н и я   р е ш е н и я

1 Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

Р е ш е н и е. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Найдем номер $N(\varepsilon)$.

Из неравенства $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ получим $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$. Отсюда $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$.

Если взять $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$ (так как при $\varepsilon\ge 1$ получим $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]=0\notin\mathbb{N}$), то для всех номеров $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$.

Например, при $\varepsilon=0{,}01$ последнее неравенство справедливо для членов последовательности с номерами 100, 101, ..., а при $\varepsilon=2$ неравенство верно $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

2 Доказать, что ограниченная последовательность $x_n=(-1)^n$ не имеет предела.

Р е ш е н и е. Предположим, что она имеет предел, равный $a\in\mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n=a \iff \forall\ \varepsilon=\frac{1}{2}\ \exists N(\varepsilon):\forall n\ge N(\varepsilon)\quad \left|(-1)^n-a\right|<\frac{1}{2}.$$

При $n=2k$ получим $|1-a|<\dfrac{1}{2}$, при $n=2k-1$ получим

$$|-1-a|<\frac{1}{2}\ \text{или}\ |1+a|<\frac{1}{2}.$$

С учетом этого $\forall n\ge N(\varepsilon)$

$$2=|1-a+a+1|\le|1-a|+|1+a|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

т. е. $2<1$. Получили противоречие.

Значит, последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

3 Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{(-1)^n}{2n}$ сходится к нулю, но она не является монотонной.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon) \quad \left| \frac{(-1)^n}{2n} - 0 \right| < \varepsilon .$$

Найдем номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого выполняется это неравенство:

$$\left| \frac{(-1)^n}{2n} \right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2n} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n > \frac{1}{2\varepsilon} \;\Leftrightarrow\; N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon} \right] + 1 .$$

Следовательно, последовательность сходится.

Так как $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$, $x_3 = -\dfrac{1}{6}$, …, то последовательность не является монотонной.

4 Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

Решение. Покажем, что $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$ монотонна.

Рассмотрим $x_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{2}{n+1} \cdot \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2}{n+1} \cdot x_n$.

Следовательно, $x_{n+1} < x_n \quad \forall n > 2$, т. е. x_n – убывающая и ограничена снизу числом 0. По свойству сходимости монотонной ограниченой последовательности существует предел последовательности $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$, равный b, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = \dfrac{2}{n+1} \cdot x_n$ при $n \to \infty$, получим $b = b \cdot 0$. Отсюда $b = 0$.

5 Доказать, что $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{4}\right) \ldots \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$ – сходится.

Решение. Так как

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1,$$

то x_n – возрастает.

Покажем, что последовательность ограничена. Имеем:

$$\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{4}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

т .е. $\ln x_n < 1$. Откуда $x_n < e$.

Значит, x_n – монотонна и ограничена. Тогда по свойству о сходимости монотонной и ограниченной последовательности x_n сходится.

6 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n-5}{2n+3}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n+1}\right)$, в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n$.

Решение. а) имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n-5}{2n+3} = \left[\begin{array}{l}\text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } n\end{array}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{8-\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}} =$$

$$= \text{ по свойствам пределов } = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)} =$$

$$= \text{ по свойствам пределов } = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 8 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{8-0}{2+0} = \frac{8}{2} = 4.$$

б) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right) = (\infty - \infty) =$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{умножим и разделим}\\ \text{на } \sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\end{matrix}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=\frac{1}{2}.$$

в) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n=\left(1^\infty\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}\cdot\left(\frac{-4}{n+3}\right)\cdot n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}}\right)^{\frac{-4n}{n+3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n}{n+3}}=\mathrm{e}^{-4}.$$

7 Доказать, что последовательность $x_n=a_0+a_1q+\ldots+a_nq^n$, где $|a_k|<M \quad \forall k=\overline{1,n}$, $|q|<1$, сходится.

Решение. Для доказательства используется критерий Коши. Возьмем любое $\varepsilon>0$ и рассмотрим разность

$$\left|x_n-x_{n+p}\right|=\left|a_{n+p}q^{n+p}+a_{n+p-1}q^{n+p-1}+\ldots+a_{n+1}q^{n+1}\right|\le$$

$$\le M\left|q^{n+p}\right|+\ldots+M\left|q^{n+1}\right|\le Mp\left|q^{n+1}\right|\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно, существует $N(\varepsilon)=\left[\frac{\varepsilon}{M}\right]+1$, такое, что $\forall n<$ □ и $\forall p>0$ выполняется неравенство $\left|x_n-x_{n+p}\right|<\varepsilon$. Следовательно, последовательность (x_n) является фундаментальной и согласно критерию Коши она сходится.

8 Доказать, что $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ расходится.

Решение. Построим отрицание к критерию Коши:

$$\exists\varepsilon_0>0 \ \ \forall N \ \ \exists n\ge N \ \ \exists p\ge N: \left|x_{n+p}-x_n\right|\ge\varepsilon_0.$$

Для этого рассмотрим разность

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\left|\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p-1}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right|\ge p\cdot\frac{1}{n+p}.$$

Пусть $p=n$. Тогда получим $\left|x_{2n}-x_n\right|\ge\frac{1}{2}$.

Значит, $\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$, такое, что $\forall N \ \exists n = p \geq N$, $\left| x_{2n} - x_n \right| \geq \varepsilon_0$, т.е. последовательность не является фундаментальной, а значит и не сходится.

9 Доказать, что последовательность $x_n = \sin n$ расходится.

Р е ш е н и е . Доказательство проведем от противного.

Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = a$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+2) = a$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin(n+2) - \sin n\right) = 0 .$$

С другой стороны

$$\sin(n+2) = 2\sin 1 \cdot \cos(n+1),$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(2\sin 1 \cdot \cos(n+1) - \sin n\right) = 0 .$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n+1) = 0$.

С учетом того, что $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$, имеем

$$\sin n = \frac{1}{\sin 1}\left(\cos n \cos 1 - \cos(n+1)\right).$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \sin n = \frac{1}{\sin 1} \lim_{n\to\infty} \left(\cos n \cos 1 - \cos(n+1)\right) = 0 .$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = \lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$, что противоречит равенству $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$.

Следовательно, $\sin n$ расходится.

Тема 3 Предел функции

1 Найти область определения следующих функций:

а) $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x-2}$; б) $y = \arccos\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)$; в) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x^2-9}} - \sqrt{\sin x}$.

2 Исследовать на ограниченность следующие функции:

а) $y = \dfrac{3}{x-2}$ на $(1;3)$, б) $y = \dfrac{\cos x}{x^2+1}$ на $\mathbb{R}$.

3 Определить, какая из данных функций четная, нечетная:

а) $y = |x| - 5\ln\left(x^2+1\right)$;

б) $y = x^3 + 3\sin x$;

в) $y = \log_2\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$.

4 Найти период следующих функций:

а) $y = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$, б) $y = \sin|x|$.

5 Используя определение предела функции по Коши, доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to 2} 3x = 6$; в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}(2x - 4) = -2$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x - 4) = +\infty$.

6 Доказать, что функция $y(x) = \sin x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

7 Доказать, что число 1 не является пределом функции $f(x)$ при $x \to 0$, если $f(x) = \sin x$.

8 Привести пример функции, удовлетворяющей условию:

а) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$, б) $f(x)$ не имеет предела в точке $x = 2$.

9 Привести пример функций $f(x)$ и $q(x)$, каждая из которых не имеет предела в точке $x = 0$, но их сумма, произведение, разность; частное имеет предел в точке $x = 0$.

10 Известно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} q(x) = B$. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f^n(x),\ n \in \square$; в) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+1\right)\left(q(x)-2\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f^2(x) - q(x)}{q^2(x)+1}$; г) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f^2(x)}$.

11. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2 + \dfrac{1}{x} + 3x - 2\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$; е) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 6x + 1}}{x^2 - 3x + 1}$; ж) $\lim\limits_{x\to 2} \lg\left(4x - 1 + \sqrt{2x + 5}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{2x-7}\right)^x$.

12 Для функции $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x+2)(x+1)}$ найти:

а) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$;

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти область определения D и множество значений E функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Р е ш е н и е. Функция $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ определена, если $4-x^2>0$, т.е. если $|x|<2$. Поэтому областью определения функции является множество

$$D(f)=\{\,x\in\mathbb{R}\mid |x|<2\,\}=(-2;2).$$

Поскольку $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\geq\dfrac{1}{2}$ для всех x из области определения, то множество значений есть

$$E(f)=\left\{y\,\middle|\, y\geq\frac{1}{2}\right\}=\left[\frac{1}{2};+\infty\right).$$

2 Доказать, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ является неограниченной сверху на множестве $(0;1)$.

Р е ш е н и е. По определению:

$f(x)$ *ограничена сверху на* $(0;1)$ $\Leftrightarrow$

$$\exists M\in\mathbb{R}:\forall x\in(0;1)\Rightarrow f(x)\leq M.$$

Построим отрицание для этого определения:

$f(x)$ *неограничена сверху на* $(0;1)$ $\Leftrightarrow$

$$\forall M\in\mathbb{R}:\exists x\in(0;1)\Rightarrow f(x)>M.$$

Возьмем $x=\dfrac{1}{1+|M|}$.

Тогда $f\left(\dfrac{1}{1+|M|}\right)=1+|M|>M$ для любого M.

Следовательно, существует такое число $x\in(0;1)$, что $f(x)>M$. Поэтому функция неограничена.

3 Определить, какая из данных функций четная, нечетная

а) $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}+2\sin x$, б) $f(x)=x^2+5x$, в) $f(x)=2^x+2^{-x}$?

Решение.

а) изменим знак аргумента, тогда получим:

$f(-x)=(-x)^2\cdot\sqrt[3]{-x}+2\sin(-x)=-x^2\cdot\sqrt[3]{x}-2\sin x=-f(x)$.

Следовательно, функция нечетная.

б) здесь $f(-x)=(-x)^2+5(-x)=x^2-5x$. Таким образом, эта функция общего вида.

в) имеем

$$f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^x=f(x).$$

4 Найти период функции $y=\cos 3x+\cos 4x$.

Решение. Функция $\cos 3x$ имеет период $T_1=\dfrac{2\pi}{3}$, а функция $\cos 4x$ – период $T_2=\dfrac{2\pi}{4}$. Поскольку $3T_1=4T_2=2\pi$, то число 2π является периодом данной функции.

5 Показать, что функция $y=3x+2$ имеет обратную, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Функция $y=3x+2$ $\forall x\in\mathbb{R}$ монотонно возрастает. Следовательно, имеет обратную.

Решив уравнение $y=3x+2$ относительно x, получим $x=f^{-1}(y)=\dfrac{y-2}{3}$.Поменяв местами обозначения, найдем обратную функцию $y=f^{-1}(x)=\dfrac{x-2}{3}$.

Графики этих функций изображены на рисунке 2. 1.

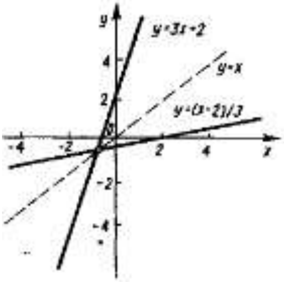

Рисунок 2. 1. – Графики функции $y = 3x + 2$ и обратной ей $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$

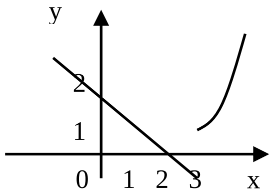

Рисунок 2. 2 – График функции $y = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } x < 3, \\ 0{,}1x^2, & \text{если } x \ge 3. \end{cases}$

6 Построить график функции $y = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } x < 3, \\ 0{,}1x^2, & \text{если } x \ge 3. \end{cases}$

Решение. При $x < 3$ функция представляется лучом прямой $y = 2 - x$, при $x \ge 3$ – параболой $y = 0{,}1x^2$. График данной функции представлен на рисунке 2. 2.

7 Используя определение предела функции по Гейне, доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Решение. Функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ (рисунок 2. 3) не определена в точке $x_0 = 1$, но определена для любой $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$. Пусть (x_n) – произвольная последовательность с общим членом $x_n \ne 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$. Образуем последовательность $f(x_n) = \dfrac{x_n^2 - 1}{x_n - 1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Так как $x_n \ne 1$, то $f(x_n) = x_n + 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n + 1) = 2$.

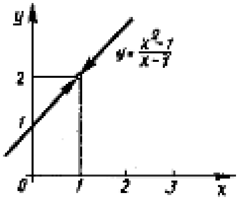

Рисунок 2. 3 – График функции $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

8 Доказать, что функция $y(x)=\cos x$ не имеет предела при $x\to+\infty$.

Решение. Докажем, что эта функция не удовлетворяет определению предела функции при $x\to+\infty$ по Гейне:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall(x_n),\ x_n>0,\ x_n\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0):\ \lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

Для этого укажем такую бесконечно большую последовательность (x_n), что последовательность $(\cos x_n)$ расходится. Положим $x_n=\pi n$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ и последовательность $\cos x_n=(1,-1,1,-1,\ldots)$ расходится. Следовательно, функция $\cos x$ не имеет предела при $x\to+\infty$.

9 Используя определение предела по Коши, доказать, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

Решение. Возьмем произвольное малое $\varepsilon>0$. Положим $\delta=\varepsilon$. Известно, что $\forall x\in\overset{\circ}{U}(\delta;0)$ выполняется неравенство $|\sin x|\le|x|<\delta=\varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

10 Докажите, что для функции

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\ge 0,\\ 0, \text{ если } x<0\end{cases}$$

число 1 не является пределом при $x\to 0$.

Решение. Положим $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Тогда $\forall\delta > 0$ существуют $x \geq 0$ и $x < 0$ такие, что $0 < |x - x_0| < \delta$. Для $x < 0$ имеем

$$|f(x) - 1| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$\exists\, \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x\ \ 0 < |x - x_0| < \delta: \quad |f(x) - 1| \geq \varepsilon_0.$$

Поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 1$.

Тема 4 Бесконечно малые функции

1 Доказать, что функция $\alpha(x)$ при $x \to a$ является бесконечно малой:

а) $\alpha(x) = \sin(x - 2)$ при $x \to 2$;

б) $\alpha(x) = x^2 - 3x + 2$ при $x \to 1$;

в) $\alpha(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to 0$.

2 С помощью принципа замены эквивалентных функций вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1 + 2x)}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x + x^3 - 2x^5}{5x + 3x^3 + x^4}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{1 + \sin 2x} - 1}{\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\sqrt[4]{x^4 - 7x^8}}$;

е) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 6x - \cos 4x}{\arcsin^2 3x}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sqrt[4]{16x^4 + x^8}}$;

и) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{2\sin^2 x - \operatorname{arctg} 2x}$.

3 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{x+2}$;

г) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4t}-1}{t}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+\sin x}-1}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$;

и) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x^2}{\sin \pi x^3}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{\frac{x}{2}}$;

л) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{e^{3t}-1}$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos^2 x}{x^2}$;

н) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{2x^2}{x^2-4}\right)$.

П р и м е р ы   о ф о р м л е н и я   р е ш е н и я

1 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

б) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2y}-1}{y}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} bx}{x}$;

д) $\dfrac{\ln(1+3y)}{y}$;

е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$.

ж) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

и) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y}$;

Р е ш е н и е .

а) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\frac{5}{3}.$$

б) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}2\cdot\frac{(1+2y)^{\frac{1}{2}}-1}{2y}=\quad 2y=x\quad=$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

в) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1 + \frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

г) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\, bx}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin bx}{\cos bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{b}{\cos bx} =$$

$$= 1\cdot b = b.$$

д) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+3y)}{y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y\to 0} 3\cdot\frac{\ln(1+3y)}{3y} = \quad 3y = x \quad =$$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 3\cdot 1 = 3.$$

е) имеем:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{(x-5)(x-1)} = \quad x-5=t \quad =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t(t+4)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+4} = 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

ж) имеем:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \left(1^{\infty}\right) = \left[\begin{array}{l}\text{введем новую}\\ \text{переменную } y = 2x\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}} = \left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^2 = e^2.$$

и) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{\frac{2y}{2}}=\left[\frac{y}{2}=x\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Тема 5 Непрерывность функции

1 Докажите непрерывность следующих функций:

а) $y=x^2$; б) $y=\cos x$; в) $y=\sqrt{x}$.

2 Функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0=1$, исключая саму точку x_0. Доопределите функцию $f(x)$ задав $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; б) $f(x)=\dfrac{\sin(1-x)}{x-1}$.

3 Исследовать на непрерывность сложную функцию $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

4 Непрерывна ли функция

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ при } x<0,\\ x+1, \text{ при } 0\le x<1,\\ -x^2+4x-1, \text{ при } 1\le x<3,\\ 5-x, \text{ при } x\ge 3?\end{cases}$$

5 Установите, как надо доопределить функцию в точке $x=a$, чтобы функция в этой точке была непрерывна:

а) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$, $x=0$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$, $x=3$.

6 Докажите, что уравнение $x^3+4x-6=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в промежутке $(1;2)$.

7 Исследовать функцию $y=\dfrac{[x]}{x}$ на непрерывность, и построить график функции.

8 Найти точки разрыва функций и установить их тип:

а) $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$;

б) $y=\sin\dfrac{1}{x}$;

в) $y=\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|$;

г) $y=\dfrac{3x+7}{x^2-3x+2}$;

д) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x}$;

е) $y=\begin{cases}-2x+3, \text{ если } x<1\\ 3x+2, \text{ если } x\ge 1.\end{cases}$.

Примеры оформления решения

1 Доказать непрерывность функции $y=ax+b$.

Решение. Функция $y=ax+b$ определена при всех значениях x, т.е. $\forall x\in \mathbb{R}$. Фиксируем некоторое значение x_0 из этого множества.

Тогда

$\forall\varepsilon>0\ \ |y(x)-y(x_0)|=|ax+b-ax_0-b|=|ax-ax_0|=|a|\cdot|x-x_0|$.

Как только $|x-x_0|<\delta$, то $|y(x)-y(x_0)|<|a|\cdot\delta$.

Следовательно,

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\ \ \delta=\frac{\varepsilon}{|a|}\ :\ |x-x_0|<\delta\ \Rightarrow$$

$$|y(x)-y(x_0)|<|a|\cdot\delta=|a|\cdot\frac{\varepsilon}{|a|}=\varepsilon\ .$$

2 Исследовать на непрерывность сложные функции

а) $y=e^{-\frac{1}{x}}$, б) $y=\sin x^4$.

Решение. а) функция $y=e^{-\frac{1}{x}}$ является композицией следующих элементарных функций: $y=-\dfrac{1}{x}$ и $f=e^y$. Так как функция $y=-\dfrac{1}{x}$ не определена в точке $x=0$, то функция не является непрерывной в этой точке. В остальных точках она непрерывна как композиция непрерывных функций.

б) функция $y=\sin x^4$ является композицией функций $y=\sin z$ и $z=x^4$. Так как функции y и z непрерывны при всех значениях своих аргументов, то по теореме о непрерывности сложной функции $y=\sin x^4$ также непрерывна при всех x.

3 Доопределить функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0,\end{cases}$$

задав $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0.

Решение. Функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0\end{cases}$$

непрерывна во всех точках числовой прямой кроме точки $x=0$. Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\dfrac{\sin x}{x}=1\neq 0$, то в точке $x=0$ функция имеет устранимый разрыв. Этот разрыв можно устранить, положив

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 1, \text{ если } x=0.\end{cases}$$

4 Доказать, что уравнение $x^3-4x+2=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в указанном промежутке $(0,1)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^3-4x+2$. Она непрерывна при всех x (как сумма непрерывных функций $f_1=x^3$, $f_2=-4x$, $f_3=2$). Так как $f(0)=2>0$ и $f(1)=-1<0$, то между точками 0 и 1 найдется точка x_0, в которой эта функция обращается в нуль: $f(x_0)=0$. Поэтому x_0 – корень уравнения.

5 Найти точки разрыва функции $y=[x]$, где $[x]$ – целая часть числа, и построить график.

Решение. Функция $E(x)$ определена следующим образом: если $x = n + q$, где n – целое число, а $0 \le q \le 1$, то $[x] = n$, т.е. функция равна целой части числа. Областью определения данной функции является множество $\mathbb{R}$. Функция $y = [x]$ терпит разрыв при каждом целочисленном значении x. Действительно, пусть $x_0 = n$, тогда $y(x_0) = n$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} y = n - 1$, а $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} y = n$. Причем каждая из этих точек является точкой разрыва первого рода (рисунок 2. 4).

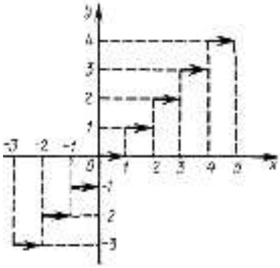

Рисунок 2. 4 – График функции $y = [x]$

Во всех точках $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ функция $y = [x]$ является непрерывной как постоянная.

6 Определить точки разрыва функции $y = e^{\frac{2}{x-1}}$.

Решение. Данная функция не определена в точке $x = 1$.

Односторонние пределы равны:

$$\lim_{x \to 1-0} e^{\frac{2}{x-1}} = 0, \quad \lim_{x \to 1+0} e^{\frac{2}{x-1}} = +\infty .$$

Поскольку один из односторонних пределов является бесконечностью, то $x = 1$ является точкой разрыва второго рода этой функции.

Раздел 3 Дифференциальное исчисление функции действительной переменной

Тема 1 Определение производной

1 Пользуясь определением производной, получить формулы для производных для данных функций в точке x_0:

а) $y = 3x^2$; в) $y = \dfrac{1}{x}$;

б) $y = x \cdot \ln x$; г) $y = \operatorname{tg} \pi x - x$.

Найти дифференциалы этих функций в точке $x_0 = 1$.

2 Доказать, что функция Хевисайда

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ x < 0, \\ 1 \ \text{при} \ x \geq 0 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$ не является дифференцируемой.

3 Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

а) $\sqrt[3]{0{,}1002}$; в) $e^{-0{,}85}$;

б) $\sin 31°$; г) $\operatorname{arctg} 1{,}03$.

4 Составить уравнения касательной и нормали к графику функций в указанной точке:

а) $y = \sin x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

б) $y = x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ в точке $x_0 = 1$.

5 Точка совершает гармоническое колебательное движение по закону $x = A \sin \omega t$. Определить скорость движения в момент времени $t_0 = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

6 Используя правила дифференцирования и таблицу производных, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y = 3x^4 + 5x^2 - 6x - 4$; г) $y = \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)^2$;

б) $y = \dfrac{e^x}{\operatorname{sh} x}$; д) $y = \left(x^2 + 1\right) \cdot \operatorname{arctg} x$;

в) $y = \operatorname{th} x + 2^x \cdot \operatorname{ch} x$; е) $y = \dfrac{\log_3 x}{2x^3 + 3}$.

Примеры оформления решения

1 Пользуясь определением производной, найти значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0:

а) $y = x^3$ в точке $x_0 = 1$,

б) $y = \sin x$, в произвольной точке x_0,

в) $y = a^x$, $a > 0$, в произвольной точке x_0.

Решение. а) находим приращение функции $y = x^3$ в точке $x = 1$: $\Delta y = (1 + \Delta x)^3 - 1 = 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Тогда по определению

$$y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3$$

б) имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Поэтому

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \Delta x/2\right)\frac{\sin\left(\Delta x/2\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

в) для функции $y = a^x$, $a > 0$, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

2 Доказать, что функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ не является дифференцируемой.

Решение. Очевидно, что эта функция определена и непрерывна на множестве □. Вычислим производную функции справа в точке $x_0 = 0$.

При $x \geq 0$ имеем $y = |x| = x$, $\Delta y = \Delta x$.

Поэтому

$$f_{+}'(0)=f'(0+0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Аналогично при $x<0$ получим $y=|x|=-x$, $\Delta y=-\Delta x$.

Следовательно, производная слева равна

$$f_{-}'(0)=f'(0-0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Поскольку $f_{-}'(0)\neq f_{+}'(0)$, то функция $y=|x|$ в данной точке производной не имеет.

Следовательно, она не дифференцируема в этой точке.

3 Найти дифференциал функции $y=x^2-x+3$ в точке $x=2$.

Решение. Используя определение дифференциала, находим:

$$\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-(2+\Delta x)+3-\left(2^2-2+3\right)=$$
$$=3\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Откуда $dy=3\Delta x=3dx$.

4 Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение $\sqrt{0{,}98}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y(x)=\sqrt{1+x}$.

Так как $y(-0{,}02)=\sqrt{0{,}98}$, и

$$y(0)=1,\qquad y'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}},\qquad y'(0)=\frac{1}{2},$$

то получаем:

$$y(-0{,}02)\approx y(0)+y'(0)\cdot(-0{,}02)=1-0{,}01=0{,}99.$$

5 Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y=\cos x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{6}$.

Решение. Имеем:

$$x_0=\frac{\pi}{6},\qquad y(x_0)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad y'(x_0)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}.$$

Поэтому искомое уравнение касательной запишется так

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right),$$

а уравнение нормали примет вид:

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

6 Вычислить и сравнить на промежутке $0 \le t \le 1$ мгновенные скорости двух точек, прямолинейные движения которых заданы уравнениями $S_1 = t^2$, $S_2 = 2t^4$ $(t \ge 0)$.

Решение. Находим мгновенные скорости точек в момент времени t:

$$V_1(t) = S_1'(t) = 2t,$$

$$V_2(t) = S_2'(t) = 8t^3.$$

Отсюда получаем: $V_1(0) = V_2(0) = 0$.

Видно, что $\forall t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ выполняется неравенство $V_1(t) > V_2(t)$, и $\forall t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ – неравенство $V_1(t) < V_2(t)$.

Следовательно, в точке $t = \frac{1}{2}$ имеем $V_1\left(\frac{1}{2}\right) = V_2\left(\frac{1}{2}\right)$.

7 Используя правила дифференцирования и таблицу производных, вычислить производные следующих функций:

а) $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$, б) $y = \frac{3x-2}{4x+5}$, в) $y = x\cos x - x^2 \sin x$.

Решение. а) перепишем функцию в виде:

$$y = 3x^{-\frac{1}{3}} - 6x^{-\frac{2}{3}}.$$

Решение. На рисунке 3.3 изображена трапеция $ABCD$. Пусть $AB = a$. Тогда по условию $AB = CD = BC = a$. Пусть BE и CF – высоты трапеции; $BE=CF$. Полагая $\angle BAD=\alpha$, выразим площадь трапеции как функцию от α:

$$S = S(\alpha),\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

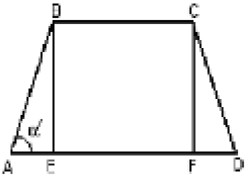

Рисунок 3. 3 – Геометрическая интерпретация задачи 6

Площадь трапеции $ABCD$ равна

$$S_{\mathrm{ABCD}} = S_{ABE} + S_{BCFE} + S_{CDF}$$

Из геометрических соображений имеем:

$$S_{ABE} = S_{CDF} = \frac{1}{2} AE \cdot BE = = \frac{1}{2} a\cos\alpha \cdot a\sin\alpha = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\alpha,$$

$$S_{BCFE} = BC \cdot BE = a^2 \sin\alpha.$$

Тогда площадь трапеции равна

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} a^2 \sin 2\alpha + a^2 \sin\alpha.$$

Исследуем функцию $S(\alpha)$ на экстремум.

$$S'(\alpha) = a^2(\cos 2\alpha + \cos\alpha).$$

Решая уравнение $S'(\alpha) = 0$, получим:

$$\cos 2\alpha + \cos\alpha = 0 \ \Rightarrow\ \cos\alpha = -1 \text{ и } \cos\alpha = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\alpha_1 = \pi + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Единственным решением этого уравнения, лежащим на $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ является $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$. Убедимся, что при $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ функция $S(\alpha)$ достигает максимума.

$$S''(\alpha)=-a^2\left(2\sin 2\alpha+\sin\alpha\right).$$

Так как $\sin\dfrac{2\pi}{3}>0$, $\sin\dfrac{\pi}{3}>0$, $a>0$, то $S''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)<0$.

Значит, при $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ функция $S(\alpha)$ достигает наибольшего значения на интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Угол при большем основании трапеции равен $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

Тема 7 Исследование функции

1 Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

а) $f(x)=2x^4-3x^2+x-1$;

б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

в) $f(x)=e^{-x^2}$;

г) $f(x)=x+36x^2-2x^3-x^4$;

д) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{4}}$;

е) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$;

ж) $f(x)=x-\cos x$;

и) $f(x)=\left(x^2-1\right)^3$;

к) $f(x)=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$;

л) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

2 Найти асимптоты графиков функций:

а) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$;

б) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}-3x$;

г) $y=x^2e^{-x}$;

д) $y=x+\operatorname{arctg}2x$;

в) $y = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$; е) $y = 2^{\frac{1}{1-x}}$.

3 Исследовать функции:

а) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; д) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$;

б) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; е) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$;

в) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$; ж) $f(x) = x + \dfrac{7}{x} - \dfrac{3}{x^2}$;

г) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$; и) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-1}$.

Примеры оформления решения

1 Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции $y = x^5 + 5x - 6$.

Решение. Имеем:

$$y' = 5x^4 + 5,$$
$$y'' = 20x^3.$$

Если $x < 0$, то $y'' < 0$ и кривая выпукла.

Если $x > 0$, то $y'' > 0$ и кривая вогнута.

Итак, кривая выпукла на промежутке $(-\infty;0)$, вогнута на промежутке $(0;+\infty)$.

2 Найти точки перегиба графика функции:

а) $y = (x+1)^2(x-2)$; б) $y = \sqrt[3]{(x-5)^5} + 2$.

Решение. а) первая и вторая производные равны соответственно

$$y' = 3(x^2 - 1),$$
$$y'' = 6x.$$

Так как $y'' = 0$ в точке $x = 0$, то исследуем эту точку на перегиб. В окрестности точки $x = 0$ при $x < 0$, то $y'' < 0$ и кривая выпукла, при $x > 0$, то $y'' > 0$ и кривая вогнута. Следовательно, $x = 0$ – точка перегиба, при этом $y_{\text{пер}} = -2$;

б) имеем:

$$y' = \frac{5}{3}(x-5)^{\frac{2}{3}},\ y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}.$$

Вторая производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует в точке $x = 5$. В окрестности точки $x = 5$ получим при $x < 5$, то $y'' < 0$ и кривая выпукла, при $x > 5$, то $y'' > 0$ и кривая вогнута. Следовательно, $x = 5$ – точка перегиба, при этом $y_{\text{пер}} = 2$.

3 Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+2}$.

Решение. 1) функция определена на промежутках

$$(-\infty;-2) \cup (-2;+\infty).$$

Так как

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x+2} = -\infty,\quad \lim_{x \to -2+0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x+2} = +\infty,$$

то прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой;

2) наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+2)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{(x+2)} - x \right] = -4.$$

Следовательно, наклонная асимптота имеет вид

$$y = x - 4;$$

3) горизонтальных асимптот нет, так как

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{(x+2)} = \infty.$$

4 Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$ и построить ее график.

*Решение***.** Для построения графика функции проведем ее исследование по приведенной схеме.

1) находим $D(f)$, определяем точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрию. Функция неопределенна в точках, где знаменатель обращается в нуль, т. е. при $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$. Следовательно, область определения есть $D(f) = \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \infty\right)$.

Исследуем поведение функции в окрестностях точек $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$:

$$\lim_{x \to \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \to \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty.$$

Следовательно, точки $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$ являются точками разрыва второго рода.

Поскольку $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{3 - x^2} = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{3 - x^2} = -\infty$, то здесь функция неограничена.

График функции пересекает координатные оси в только в начале координат, так как $y = 0 \iff x = 0$.

Функция не является периодичной.

Функция нечетная, так как область определения $D(f)$ симметрична и $f(-x) = -f(x)$, т. е.

$$\frac{(-x)^3}{3 - x^2} = \frac{-x^3}{3 - x^2}.$$

Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат и достаточно исследовать функцию для $x \ge 0$;

2) асимптоты графика функции. Поскольку односторонние пределы в точках $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$ раны бесконечности, то прямые $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Вычислим пределы:

$$k = \lim_{x \to \infty} = \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{(3 - x^2)x} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{3 - x^2} + x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 3x - x^3}{3 - x^2} = 0,$$

Прямая $y = -x$ является наклонной асимптотой графика функции;

3) точки возможного экстремума и интервалы монотонности функции. Находим первую производную функции:

$$y' = \frac{3x^2\left(3 - x^2\right) + 2x^4}{\left(3 - x^2\right)^2} = \frac{x^2\left(9 - x^2\right)}{\left(3 - x^2\right)^2}.$$

Функция y' определена на $D(f)$. В промежутке $[0;+\infty)$ производная обращается в нуль в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Определяем интервалы монотонности из неравенств $y' > 0$ и $y' < 0$ для любого $x \geq 0$.

Имеем:

$$\frac{x^2\left(9 - x^2\right)}{\left(3 - x^2\right)^2} > 0,\ 9 - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 3,$$

т. е. функция возрастает на $\left(0;\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3};3\right)$.

Аналогично:

$$\frac{x^2\left(9 - x^2\right)}{\left(3 - x^2\right)^2} < 0,\ 9 - x^2 < 0 \Rightarrow x > 3,$$

т. е. функция убывает на $[3;\infty)$;

4) промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба. Вычисляем вторую производную функции $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$:

$$y'' = \frac{\left(18x - 4x^3\right)\left(3 - x^2\right)^2 - \left(9x^2 - x^4\right)2\left(3 - x^2\right)\left(-2x\right)}{\left(3 - x^2\right)^4} = \frac{6x\left(9 - x^2\right)}{\left(3 - x^2\right)^3}.$$

Функция y'' определена на области определения $D(f)$.

Находим интервалы вогнутости и выпуклости графика функции из неравенств $y'' > 0$, $y'' < 0$ для любого $x \geq 0$.

Имеем:

$$\frac{6x\left(9 - x^2\right)}{\left(3 - x^2\right)^3} > 0,$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ 3 - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \sqrt{3},$$

т. е. кривая вогнута на $\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Аналогично:

$$\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}<0,$$

$$\begin{cases} x>0, \\ 3-x^2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ 3<x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<-\sqrt{3},\ x>\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x>\sqrt{3},$$

т. е. кривая выпукла на $\left(\sqrt{3};\infty\right)$.

В точке $x=0$ имеем $y''=0$ и $y''(x)<0$ в окрестности $U(\delta;0-0)$, а $y''(x)>0$ в окрестности $U(\delta;0+0)$. Значит, точка кривой с абсциссой $x=0$ отделяет интервал выпуклости кривой от ее интервала вогнутости. Поэтому $O(0;0)$ является точкой перегиба кривой;

5) локальные экстремумы. Определяем с помощью второй производной $y''(x)$ локальные экстремумы. Так как $y''(3)=0$, точка A_1 с абсциссой $x=3$ является точкой локального максимума. В силу симметрии графика функции точка A_2 с абсциссой $x=-3$ является точкой локального минимума. Итак, $\max\limits_{x\in U(\delta;3)} y(x)=-4{,}5$, $\min\limits_{x\in U(\delta;-3)} y(x)=4{,}5$.

Результаты исследования функции заносим в таблицу 3.1.

Таблица 3. 1 – Результаты исследования функции

x	0	$\left(0;\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3};3\right)$	3	$(3;\infty)$
y'	0	+	Не сущ.	+	0	–
y''	0	+	Не сущ.	–	–	–
y	0	↗	Не сущ.	↗	-4,5	↘
	(т.перег)				max	

Исходя из результатов, содержащихся в таблице 3. 1, строим график данной функции для $x\in[0;\infty)$. Используя нечетность функции, достраиваем ее график на всей области определения (рисунок 3.4).

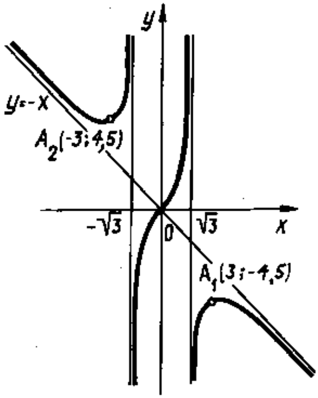

Рисунок 3. 4 – График функции $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$

Тема 8 Построение графика функции

1 Исследовать функции и построить их графики:

а) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$; д) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2\sqrt{x + 1}$;

б) $f(x) = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$; е) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x}$;

в) $f(x) = e^x - x$; ж) $f(x) = (x - 2)e^{-\frac{1}{x}}$;

г) $f(x) = \ln x - x + 1$; и) $f(x) = \sin x - \sin^2 x$.

2 Исследовать следующие функции, заданные параметрическими уравнениями, и построить график:

а) $x = \dfrac{1}{4}(t + 1)^2$, $y = \dfrac{1}{4}(t - 1)^2$; в) $x = \dfrac{t^2}{t - 1}$, $y = \dfrac{t}{t^2 - 1}$.

б) $x = \dfrac{t^2}{1 - t^2}$, $y = \dfrac{1}{1 + t^2}$; г) $x = -5t^2 + 2t^5$, $y = -3t^2 + 2t^3$;

3 Исследовать следующие функции, заданные неявно, и построить график:

а) $xy^2 - y^2 - 4x = 0$; б) $x^6 + 2x^3y = y^3$ (положить $y = x^2t$).

4 Исследовать следующие функции, заданные в полярных координатах и построить график:

а) $r=\dfrac{5}{\varphi}$; б) $r=\dfrac{2}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$.

П р и м е р ы   о ф о р м л е н и я   р е ш е н и я

1 Исследовать функцию $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е . 1) находим $D(f)$, определяем точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрию. Функция определена при тех значениях x, для которых, как следует из определения арксинуса, выполнено неравенство

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leq 1.$$

Данное неравенство равносильно неравенству $\left(1-|x|^2\right)\geq 0$, которое верно для любых вещественных x.

Итак, $D(f)=\mathbb{R}$.

Функция $\dfrac{2x}{1+x^2}$ непрерывна в любой точке (как частное двух непрерывных функций). Поэтому функция $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ также непрерывна в любой точке (как суперпозиция непрерывных функций).

Функция непериодическая.

Поскольку

$$y(-x)=\arcsin\frac{2(-x)}{1+(-x)^2}=-\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=y(x),$$

то функция является нечетной. Поэтому вместо всей области определения достаточно рассмотреть полупрямую $[0;+\infty)$.

При $x=0$ имеем $y=0$. Других нулей функция не имеет. На полупрямой $(0;+\infty)$ функция является положительной;

2) асимптоты графика функции. В силу непрерывности функции $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ на $\mathbb{R}$, график функции не имеет вертикальных асимптот. Для нахождения наклонной асимптоты при $x \to +\infty$ вычислим следующие пределы:

$$k = \lim_{x\to+\infty} = \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty} \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \arcsin 0 = 0.$$

Отсюда следует, что прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой при $x \to +\infty$.

Аналогично устанавливается, что прямая $y = 0$ – горизонтальной асимптотой при $x \to -\infty$;

3) точки возможного экстремума и интервалы монотонности функции.

Найдем точки возможного экстремума на полупрямой $[0;+\infty)$. Вычислим производную функции при $x \neq 1$:

$$y' = \left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}\cdot\frac{2\left(1+x^2\right)-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1+x^2}{\left|1-x^2\right|}\cdot\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\,\mathrm{sgn}\left(1-x^2\right)}{1+x^2}.$$

Отсюда видно, что производная не обращается в нуль ни в одной точке. Так как $y'(1+0) = -1$, $y'(1-0) = 1$, то точка $x = 1$ является точкой излома. Значит, имеем только одну точку возможного экстремума $x = 1$.

Промежутки монотонности функции определяются знаком производной: $y' > 0$ при $x \in [0;1)$, $y' < 0$ при $x \in (1;+\infty)$.

Знак производной при переходе через точку $x = 1$ меняется с плюса на минус. Поэтому в точке $x = 1$ функция имеет локальный максимум, причем $y(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Отметим, что в точке $x = 1$ функция непрерывна, а ее производная имеет разрыв 1-го рода. Значит, точка графика $\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$ является угловой точкой;

4) промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба. Вторая производная при $x \neq 1$ имеет вид

$$y'' = \frac{-4x\,\mathrm{sgn}\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Направление выпуклости определяется знаком второй производной:

– $y'' < 0$ при $x \in [0;1)$, значит график функции на этом промежутке выпуклый,

– $y'' > 0$ при $x \in (1;+\infty)$, значит график функции на этом промежутке вогнут.

Так как вторая производная обращается в нуль лишь при $x = 0$ и при переходе через точку $x = 0$ меняет знак, то в точке $(0;0)$ график функций имеет перегиб.

Результаты исследования функции заносим в таблицу 3. 2.

Таблица 3. 2 – Результаты исследования функции $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

x	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
y'	2	+	Не сущ.	–
y''	0	–	Не сущ.	+
y	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘
	Точка перег.		max Угл.точ.	

Исходя из результатов, содержащихся в таблице 3.2, строим график данной функции на полупрямой $[0;\infty)$.

Используя нечетность функции, достраиваем ее график на всей области определения (рисунок 4. 5).

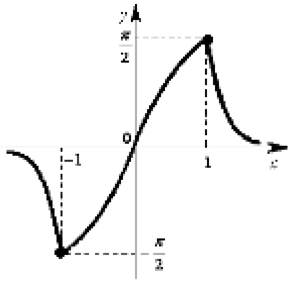

Рисунок 3. 5 – График функции $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

2 Исследовать функцию, заданную параметрическими уравнениями, и построить график

$$x = \frac{t}{1-t^2}, \; y = \frac{t\left(1-2t^2\right)}{1-t^2}.$$

Р е ш е н и е. 1) функции $x(t), \; y(t)$ определены на множестве

$$T = (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty).$$

Поскольку

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0, \; \lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0, \; \lim_{t\to\infty} y(t) = -\infty,$$

то $x = 0$ – вертикальная асимптота кривой.

Найдем односторонние пределы в точках $t = -1$ и $t = 1$:

$$\lim_{t\to-1-0} x(t) = +\infty, \; \lim_{t\to-1+0} x(t) = -\infty,$$

$$\lim_{t\to-1-0} y(t) = -\infty, \; \lim_{t\to-1+0} y(t) = +\infty,$$

$$\lim_{t\to1-0} x(t) = +\infty, \; \lim_{t\to1+0} x(t) = -\infty,$$

$$\lim_{t\to1-0} y(t) = -\infty, \; \lim_{t\to1+0} y(t) = +\infty.$$

Отсюда следует, что при $t \to -1$ и $t \to 1$ возможны наклонные асимптоты.

Так как при $t \to 1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to1\pm0} \left(1-2t^2\right) = -1, \quad \lim_{x\to\pm\infty} (y+x) = \lim_{t\to1\pm0} \frac{1+t-2t^2}{1-t^2} = \frac{3}{2},$$

то прямая $y = -x + \frac{3}{2}$ – наклонная асимптота.

Так как при $t \to -1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-1\pm0} \left(1-2t^2\right) = -1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (y+x) = \lim_{t\to-1\pm0} \frac{1+t-2t^2}{1-t^2} = -\frac{3}{2},$$

то прямая $y = -x - \frac{3}{2}$ – наклонная асимптота.

Итак,

$$x \in (0;+\infty) \cup (-\infty;+\infty) \cup (-\infty;0),$$

$$y \in (-\infty;-\infty) \cup (+\infty;-\infty) \cup (+\infty;+\infty);$$

2) так как

$$x(-t) = \frac{-t}{1-(-t)^2} = -x(t), \qquad y(-t) = \frac{-t\left(1-2(-t)^2\right)}{1-(-t)^2} = -y(t),$$

то график функции симметричен относительно начала координат $O(0;0)$. Поэтому рассмотрим график функции только на множестве $T_1 = [0;1) \cup (1;+\infty)$;

3) на множестве $T_1 = [0;1) \cup (1;+\infty)$ имеем $x = 0$ при $t = 0$, $y = 0$ при $t = 0$ и $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

4) найдем производные функций $x(t)$, $y(t)$:

$$\dot{x}(t) = \frac{1+t^2}{\left(1-t^2\right)^2}, \qquad \dot{y}(t) = \frac{2t^4-5t^2+1}{\left(1-t^2\right)^2}.$$

На множестве $T_1 = [0;1) \cup (1;+\infty)$ $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$ при

$$t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}} \approx 0{,}47 \text{ и } t_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}} \approx 1{,}51.$$

Тогда $x_1 = 0{,}6$, $y_1 = 0{,}3$ и $x_2 = -0{,}7$, $y_2 = 2{,}3$, т. е. имеем точки возможного экстремума $M_1(0{,}6;0{,}3)$ и $M_2(-0{,}7;2{,}3)$;

5) найдем производные y'_x и y''_{xx}:

$$y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t^4-5t^2+1}{1+t^2}, \qquad y''_{xx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(y'_x\right)}{\dot{x}(t)} = \frac{-4t\left(1-t^2\right)^3\left(3+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^3}.$$

Отсюда $y''_{xx} \le 0$ при $t \in [0;1)$, $y''_{xx} \ge 0$ при $t \in (1;+\infty)$;

6) составим таблицу результатов исследования (таблица 3. 3):

Таблица 3. 3 – Результаты исследования функции

$(t_p;t_{p+1})$	$(0;0{,}47)$	0,47	$(0{,}47;1)$	$(1;1{,}51)$	1,51	$(1{,}51;+\infty)$
$(x_p;x_{p+1})$	$(0;0{,}6)$	0,6	$(0{,}6;+\infty)$	$(-\infty;-0{,}7)$	-0,7	$(-0{,}7;0)$

$(y_p; y_{p+1})$	$(0; 0{,}3)$	$0{,}3$	$(0{,}3; -\infty)$	$(+\infty; 2{,}3)$	$2{,}3$	$(2{,}3; +\infty)$
Знак y''_{xx}	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$

7) строим часть кривой, соответствующую множеству $T_1 = [0;1) \cup (1;+\infty)$. Далее, используя симметрию кривой, построим всю кривую (рисунок 3. 6).

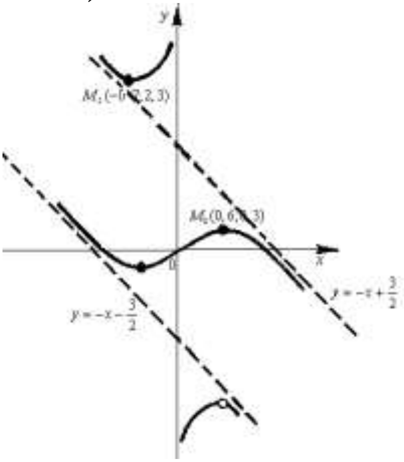

Рисунок 3. 6 – График функции

$$x = \frac{t}{1-t^2}, \ y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}.$$

3 Исследовать функцию заданную параметрическими уравнениями и построить график

$$x = 2t - t^2, \ y = 3t - t^3.$$

Решение. 1**)** функции $x(t),\ y(t)$ определены на $\mathbb{R}$.

При этом

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = -\infty, \ \lim_{t\to-\infty} y(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} x(t) = -\infty, \ \lim_{t\to\infty} y(t) = -\infty.$$

Таким образом, возможны наклонные асимптоты.

Так как

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{3t - t^3}{2t - t^2} = \infty,$$

то наклонных асимптот нет;

2) симметрией и периодичностью функция не обладает;

3) имеем $x=0$ при $t=0$ и $t=2$; $y=0$ при $t=0$, $t=-\sqrt{3}$ и $t=\sqrt{3}$;

4) найдем производные функций $x(t)$, $y(t)$:

$$\dot{x}(t)=2(1-t), \qquad \dot{y}(t)=3(1-t^2).$$

Имеем $\dot{x}=0$ при $t=1$, $\dot{y}=0$ при $t=1$ и $t=-1$. Тогда точки возможного экстремума $W(1;2)$, $N(-3;-2)$;

5) найдем производные $y_x^{'}$ и $y_{xx}^{''}$:

$$y_x^{'}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{3(1-t^2)}{2(1-t)}=\frac{3(1+t)}{2}, \; y_{xx}^{''}=\frac{3}{4(1-t)}, \; t\neq 1.$$

Отсюда $y_{xx}^{''}>0$ при $t\in(-\infty;1)$, $y_{xx}^{''}<0$ при $t\in(1;+\infty)$;

6) составим таблицу результатов исследования (таблица 3. 4);

Таблица 3. 4 – Результаты исследования функции

$(t_p;t_{p+1})$	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
$(x_p;x_{p+1})$	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;1)$	1	$(1;+\infty)$
$(y_p;y_{p+1})$	$(+\infty;-2)$	-2	$(-2;2)$	2	$(2;-\infty)$
Знак $y_{xx}^{''}$	+	+	+		-

7) строим график функции. Первая производная $y_x^{'}$ не определена в точке $t=1$, поэтому точка $W(1;2)$ является угловой точкой графика.

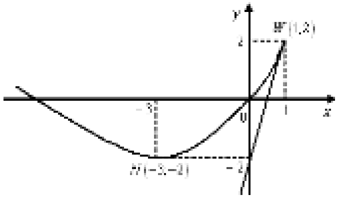

Рисунок 3. 7 – График функции $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$

4 Исследовать функцию, заданную неявно и построить ее график: $x^2=y^2+x^4$

Р е ш е н и е . <u>1 способ.</u> Разрешая данное уравнение относительно y, получим $y = \pm x\sqrt{1-x^2}$.

Функции $y_1 = x\sqrt{1-x^2}$ и $y_2 = -x\sqrt{1-x^2}$ симметричны относительно оси $0x$, то исследование можно провести для функции y_1. Эта функция определена на отрезке $\left[-1;1\right]$, т. е. $D\left(y_1\right) = \left[-1;1\right]$. Функция y_1 равна нулю при $x=-1$, $x=1$, $x=0$. На области определения $D\left(y_1\right)$ функция является нечетной.

Находим производные функции y_1:

$$y_1^{'} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad y_1^{''} = \frac{x\left(2x^2-3\right)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$$

Точками возможного экстремума являются точки:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ x_3 = -1,\ x_4 = 1.$$

Точки x_3 и x_4 являются граничными точками области определения $D\left(y_1\right)$. Определим характер точек x_1 и x_2 с помощью второй производной:

$$y_1^{''}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-3\right)}{\sqrt{\left(1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^3}} = 4 > 0,$$

$$y_1^{''}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-3\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^3}} = -4 < 0.$$

Следовательно, $x_1 = -1/\sqrt{2}$ является точкой минимума, $x_2 = 1/\sqrt{2}$ – точкой максимума. Значения функции y_1 в этих точках соответственно равны:

$$y_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=-\frac{1}{2},$$

$$y_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{2}.$$

В точке $x=0$ вторая производная обращается в нуль. При $x\in(-1;0)$ имеем y_1'' <0, при $x\in(0;1)$ имеем y_1'' >0. Следовательно, точка $O(0,0)$ является точкой перегиба графика функции $y_1=x\sqrt{1-x^2}$.

График функции $y_1=x\sqrt{1-x^2}$ изображен на рисунке 3. 8. Отображая построенный график симметрично относительно оси $0x$, получим график исходной функции $y=\pm x\sqrt{1-x^2}$ (рисунок 3. 9). Видно, в точке $O(0,0)$ график пересекает себя, поэтому является точкой самопересечения.

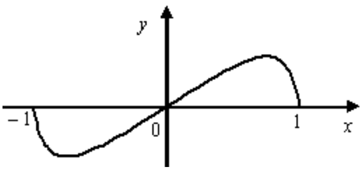

Рисунок 3. 8 – График функции $y_1=x\sqrt{1-x^2}$

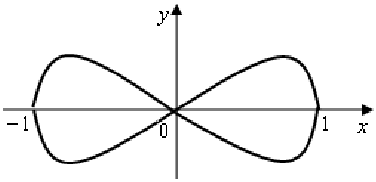

Рисунок 3. 9 – График функции $x^2=y^2+x^4$

<u>2 способ</u>. Полагая $y=x^2\operatorname{sh}t$ из уравнения $x^2=y^2+x^4$, получим $x^2=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$. Отсюда $x=\pm\dfrac{1}{\operatorname{ch}t}$. Поскольку $y(-x)=y(x)$, то график функции симметричен относительно оси $0y$, и поэтому будем рассматривать случай $x>0$.

Тогда параметрические уравнения кривой имеют вид:

$$x(t)=\frac{1}{\operatorname{ch}t},\qquad y(t)=\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

Исследование данной функции проводится по схеме для функций, заданных параметрическими уравнениями.

1) функции $x(t)$, $y(t)$ определены на $\mathbb{R}$.

При этом

$$\lim_{t\to-\infty} x(t)=0\,,\ \lim_{t\to-\infty} y(t)=0\,,\qquad \lim_{t\to+\infty} x(t)=0\,,\ \lim_{t\to\infty} y(t)=0\,.$$

Таким образом, наклонные асимптоты отсутствуют;

2) так как $x(-t)=x(t)$, $y(-t)=-y(t)$, то график функции симметричен относительно оси $0x$.

Свойством периодичности функция не обладает;

3) имеем $x=1$, $y=0$ при $t=0$;

4) найдем производные функций $x(t)$, $y(t)$:

$$\dot{x}(t)=-\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\,,\qquad \dot{y}(t)=\frac{1-\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^3 t}\,.$$

Имеем $\dot{x}=0$ при $t=0$, $\dot{y}=0$ в точках $t_1=-\operatorname{arsh}1$ и $t_2=\operatorname{arsh}1$;

5) найдем производные y_x' и y_{xx}'':

$$y_x'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\operatorname{sh}^2 t-1}{\operatorname{sh} t\cdot\operatorname{ch} t}\,,\qquad y_{xx}''=-\frac{\operatorname{sh}^2 t\left(\operatorname{sh}^2 t+\operatorname{ch}^2 t\right)+1}{\operatorname{sh}^3 t}\,.$$

Так как $y_{xx}''\left(-\operatorname{arsh}1\right)>0$, то $t_{\min}=-\operatorname{arsh}1$. Тогда

$$x_{\min}=1/\sqrt{2}\,,\ y_{\min}=-1/2\,.$$

Так как $y_{xx}''\left(\operatorname{arsh}1\right)<0$, то $t_{\max}=\operatorname{arsh}1$. Тогда

$$x_{\max}=1/\sqrt{2}\,,\ y_{\max}=1/2\,;$$

6) строим график функции $x(t)=\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$, $y(t)=\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$ (рисунок 3. 10). Отображая симметрично относительно оси $0y$, получаем график исходной функции (рисунок 3.11).

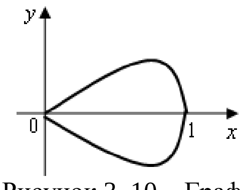

Рисунок 3. 10 – График функции

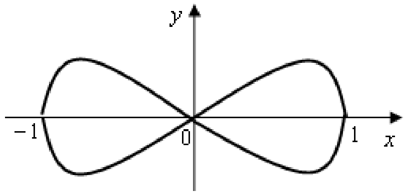

Рисунок 3. 11 – График функции $x^2=y^2+x^4$

$$x(t)=\frac{1}{\operatorname{ch} t},\ y(t)=\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t},$$

5 Исследовать и построить график функции

$$r(\varphi)=\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}.$$

Решение. Данная функция при тех значениях φ, для которых, как следует из определения полярного радиуса, выполнено неравенство

$$\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\geq 0.$$

Кроме того, функция $r(\varphi)$ является 2π периодической, то достаточно рассмотреть промежуток

$$\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\cup\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right].$$

Поскольку

$$\lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{4}-0}\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}=+\infty,$$

$$\lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{4}-0}\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

то прямая

$$r=-\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}$$

является асимптотой при $\varphi\to-\frac{\pi}{4}-0$.

Аналогично

$$\lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0}\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}=+\infty,$$

$$\lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0}\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\sin(\varphi-\frac{3\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

и прямая

$$r=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)}$$

является асимптотой при $\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0$.

Так как $\sin\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$, то это одна и та же прямая.

Если $\cos\varphi=0$, то следует r =0, т. е. имеем точку $x=y=0$.

При $\cos\varphi\neq 0$, полагая $t=\operatorname{tg}\varphi$, получим параметрическое задание кривой:

$$x=\frac{3t}{t^3+1},\ y=\frac{3t^2}{t^3+1}.$$

Найдем производные

$$\dot{x}=\frac{3\left(1-2t^3\right)}{\left(t^3+1\right)^2},\qquad \dot{y}=\frac{3t\left(2-t^3\right)}{\left(t^3+1\right)^2}.$$

Имеем $\dot{x}=0$ при $t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\dot{y}=0$ при $t=0$ и $t=\sqrt[3]{2}$.

Найдем производные f' и f'':

$$y_x'=\frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3},\qquad y_{xx}''=\frac{2\left(1+t^3\right)^4}{3\left(1-2t^3\right)^3}.$$

При $t\in(-\infty;-1)$ имеем $y_x'<0$ и $y_{xx}''>0$, значит функция убывает и вогнута, следовательно, подходит к асимптоте сверху.

При $t\in(-1;0)$ имеем $y_x'<0$ и $y_{xx}''>0$, значит, функция убывает и вогнута. При этом

$$x_{\min}=y_{\min}=0$$

При $t\in\left(0;\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ имеем $y_x'>0$ и $y_{xx}''>0$, значит, функция возрастает и вогнута. При этом

$$x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\sqrt[3]{4},\quad y\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\sqrt[3]{2}.$$

При $t \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \sqrt[3]{2} \right)$ имеем $y_x' < 0$ и $y_{xx}'' < 0$, значит, функция возрастает и выпукла. При этом

$$x_{\max} = x\left(\sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{2}, \quad y_{\max} = y\left(\sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{4}.$$

При $t \in \left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$ имеем $y_x' > 0$ и $y_{xx}'' < 0$, значит, функция возрастает и выпукла.

Так как $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = +\infty$, то $O(0;0)$ является точкой возврата.

График функции $r(\varphi) = \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$ называется *декартов лист* и изображен на рисунке 3. 12. В декартовой системе координат декартов лист задается уравнением:

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

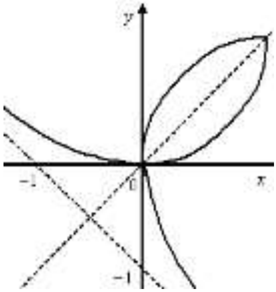

Рисунок 3. 12 – Декартов лист

Тема 9 Векторные функции

1 Найти годографы вектор функций:

а) $\vec{r} = (2t-1)\vec{i} + (-3t+2)\vec{j} + 4t\,\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$;

б) $\vec{r} = \sqrt{1-t^2}\,\vec{i} + \sqrt{1+t^2}\,\vec{j}$, $t \in [0;1]$;

в) $\vec{r} = (2t-1)\vec{i} + (-3t+2)\vec{j} + 4t\,\vec{k}$;

г) $\vec{r} = 4\,\mathrm{ch}\,t\,\vec{i} - \vec{j} + 3\,\mathrm{sh}\,t\,\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$.

2 Дано уравнение движения $\vec{r} = 3t\,\vec{i} + \left(4t - t^2\right)\vec{j}$. Определить траекторию и скорость движения. Построить векторы скорости для моментов $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$.

3 Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции

$$\vec{r} = (2t-1)\vec{i} + \left(t^2+1\right)\vec{j} - \left(t^3+2\right)\vec{k}$$

при $t = 0$.

4 Показать, что векторы

$$\vec{r} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \vec{k} \text{ и } \vec{r}\,'$$

перпендикулярны.

5 Для следующих кривых написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормальной плоскости в данной точке:

а) $x = 4\sin^2 t$, $y = 4\sin t\cos t$, $z = 2\cos^2 t$, $t = \dfrac{\pi}{4}$;

б) $x = \dfrac{e^t \sin t}{\sqrt{2}}$, $y = 1$, $z = \dfrac{e^t \cos t}{\sqrt{2}}$, $t = 0$.

6 Найти дифференциал длины дуги кривой

$x = a\cos^2 t$, $y = \sqrt{a^2+b^2}\sin t\cos t$, $z = b\sin^2 t$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти годограф вектор-функции

$$\vec{r}(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\vec{i} + \frac{2t}{1+t^2}\vec{j} + \vec{k}.$$

Р е ш е н и е. Параметрические уравнения годографа есть

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ y(t) = \frac{2t}{1+t^2},\ z(t) = 1.$$

Из первых двух уравнений исключаем параметр t:

$$x^2 + y^2 = \frac{\left(1-t^2\right)^2 + 4t^2}{\left(1+t^2\right)^2} = 1.$$

Следовательно, годографом вектор-функции является окружность

$$x^2 + y^2 = 1,\ z = 1,$$

из которой исключена точка $(-1;0;1)$.

При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка $M(x;y;z)$ на годографе движется от точки $(-1;0;1)$ против часовой стрелки (если наблюдать из точки, расположенной выше плоскости $z = 1$). При этом

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = -1\,,\quad \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = 0\,.$$

2 Вычислить $\lim\limits_{t\to 2} \vec{r}(t)$, если $\vec{r}(t) = (3t+2)\vec{i} + (2t-1)\vec{j} + (1-t)\vec{k}$.

Р е ш е н и е . Согласно определению

$$\lim_{t\to 2} \vec{r}(t) = \lim_{t\to 2}(3t+2)\vec{i} + \lim_{t\to 2}(2t-1)\vec{j} + \lim_{t\to 2}(1-t)\vec{k} = 8\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}\,.$$

3 Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции

$$\vec{r} = e^{2t}\,\vec{i} - (t+8)^{\frac{4}{3}}\vec{j}$$

при $t = 0$.

Р е ш е н и е . Параметрические уравнения годографа есть

$$x(t) = e^{2t}\,,\ \ y(t) = -(t+8)^{\frac{4}{3}}\,,\ \ z(t) = 0\,.$$

Найдем координаты направляющего вектора касательной к кривой $\left(x'(t); y'(t); z'(t)\right)$:

$$\left(x'(t); y'(t); z'(t)\right) = \left(2e^{2t}; -\frac{4}{3}(t+8)^{\frac{1}{3}}; 0\right),$$

в частности в точке $t = 0$

$$\vec{\tau} = \left(x'(t); y'(t); z'(t)\right)\Big|_{t=0} = \left(2e^{2t}; -\frac{4}{3}(t+8)^{\frac{1}{3}}; 0\right)\Bigg|_{t=0} = \left(2; -\frac{8}{3}; 0\right).$$

Тогда единичный вектор годографа имеет вид

$$\vec{\tau}^{\,0} = \frac{2}{10/3}\vec{i} - \frac{8/3}{10/3}\vec{j} + \frac{0}{10}\vec{k} = 0{,}6\vec{i} - 0{,}8\vec{j}\,.$$

4 Найти производную скалярного произведения векторов

$$\vec{r}_1 = 3t\,\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k} \ \text{ и } \ \vec{r}_2 = 2\vec{i} - 3t\,\vec{j} + \vec{k}\,.$$

Р е ш е н и е . Согласно свойствам дифференцируемых векторных функций, имеем

$$\frac{d(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)}{dt} = \vec{r}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \vec{r}_2 \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} =$$

$$= \left(3t\,\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}\right)\cdot\left(-3\vec{j}\right) + \ 2\vec{i} - 3t\,\vec{j} + \vec{k}\ \cdot 3\vec{i} = -6 + 6 = 0\,.$$

5 Дано уравнение движения $\vec{r} = 3t\,\vec{i} - 4t\,\vec{j}$. Определить траекторию и скорость движения.

Р е ш е н и е . Параметрические уравнения годографа есть

$$x(t) = 3t\,,\ \ y(t) = -4t\,,\ \ z(t) = 0\,.$$

Из первого уравнения исключим параметр t

$$t=\frac{x}{3}$$

и подставим во второе

$$y=-4\cdot\frac{x}{3}.$$

Отсюда уравнение траектории движения

$$4x+3y=0\,,\; z=0\,.$$

Вектор скорости движения есть

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}=3\vec{i}-4\,\vec{j}\,.$$

6 Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой

$$\vec{r}=\left(t^2-1\right)\vec{i}+\left(t+1\right)\vec{j}+t^3\,\vec{k}$$

в точке $M_0(0;2;1)$.

Р е ш е н и е. Данной точке соответствует значение параметра $t=1$.

Имеем

$$x'(t)=2t\,,\; y'(t)=1,\; z'(t)=3t^2\,.$$

Подставляя значение $t=1$, получаем

$$x'(1)=2\,,\; y'(1)=1,\; z'(1)=3\,.$$

Тогда уравнение касательной:

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}\,,$$

уравнение нормальной плоскости:

$$2(x-0)+1(y-2)+3(z-1)=0$$

или $2x+y+3z-5=0$.

7 Найти скорость и ускорение материальной точки M, движущейся с постоянной угловой скоростью ω по окружности

$$x^2+y^2=R^2\,.$$

Р е ш е н и е. Пусть M – произвольная точка окружности. Обозначим через φ угол между радиус-вектором точки M и положительным направлением оси Ox. По условию

$$\varphi=\omega t\,,$$

где t – время движения.

Выразим координаты точки M как функции времени (рисунок 3. 13):

$$x = R\cos\varphi = R\cos\omega t\ ,$$

$$y = R\sin\varphi = R\sin\omega t\ .$$

Следовательно, радиус-вектор точки M

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = R\cos\omega t\,\vec{i} + R\sin\omega t\,\vec{j}\ ,$$

скорость $\vec{v}(t)$ движения точки M

$$\vec{v} = \vec{r}\,'(t) = (R\cos\omega t)'\,\vec{i} + (R\sin\omega t)'\,\vec{j} = -R\omega\sin\omega t\,\vec{i} + R\omega\cos\omega t\,\vec{j}$$

,

модуль скорости

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-R\omega\sin\omega t)^2 + (R\omega\cos\omega t)^2} = \omega R\ .$$

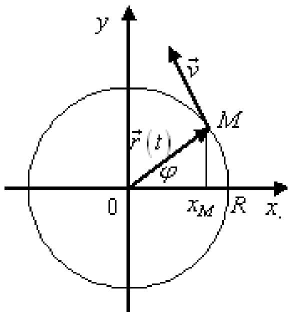

Рисунок 3. 13 – Геометрическая интерпретация задачи 7.

Скалярное произведение векторов $\vec{v}$ и $\vec{r}$ есть:

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = -R^2\cos\omega t\cdot\sin\omega t + R^2\sin\omega t\cdot\cos\omega t = 0\,,$$

т. е. векторы $\vec{v}$ и $\vec{r}$ перпендикулярны.

Отсюда следует, что вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к окружности, по которой движется точка M .

Найдем ускорение $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a} = \vec{r}\,''(t) = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = -R\omega^2\cos\omega t\,\vec{i} - R\omega^2\sin\omega t\,\vec{j} =$$

$$= -\omega^2\left(R\cos\omega t\,\vec{i} + R\sin\omega t\,\vec{j}\right) = -\omega^2\,\vec{r}(t).$$

Значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{r}$ имеют противоположные направления.

Таким образом, ускорение материальной точки, движущейся с постоянной угловой скоростью по окружности, в каждый момент времени направлено к центру этой окружности.

8 К годографу винтовой линии (рисунок 3. 14)

$$\Gamma = \left\{ x = a\cos t; y = a\sin t; z = bt \middle| \; 0 \le t \le T \right\}$$

а) найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

б) доказать, что касательная к винтовой линии образует постоянный угол с осью Oz;

в) записать натуральное уравнение винтовой линии;

г) найти дифференциал длины дуги.

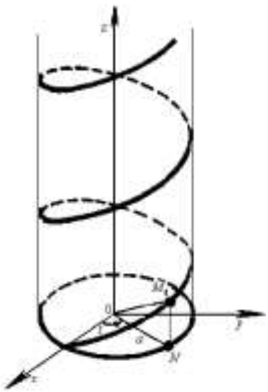

Рисунок 3. 14 – Годограф функции

$$\Gamma = \left\{ x = a\cos t; y = a\sin t; z = bt \middle| \; 0 \le t \le T \right\}$$

Решение. а) координаты точки касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$ есть:

$$x_0 = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2},\; y_0 = a\sin\frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2},\; z_0 = b\frac{\pi}{3}.$$

Координаты вектора $\vec{r}\,'(t_0)$:

$$x'(t_0) = -a\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{a\sqrt{3}}{2},\; y'(t_0) = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}.\; z'(t_0) = b.$$

Тогда уравнение касательной прямой имеет вид

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{y - \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{z - \frac{b\pi}{3}}{b},$$

а уравнение нормальной плоскости

$$-\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{a}{2}\right)-\frac{a}{2}\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)-b\left(z-\frac{b\pi}{3}\right)=0;$$

б) вектор касательный к годографу вектора $\vec{r}$:

$$\frac{d\,\vec{r}}{dt}=(-a\sin t; a\cos t; b).$$

Тогда $\cos\gamma=\dfrac{z'(t)}{\left|\dfrac{d\,\vec{r}}{dt}\right|}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

в) векторная функция $\vec{r}(t)=(a\cos t; a\sin t; bt)$ является непрерывно дифференцируемой и

$$|\vec{r}\,'(t)|=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}>0\,.$$

Тогда $l'(t)=|\vec{r}\,'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}$. Интегрируя обе части, получим $s(t)=t\sqrt{a^2+b^2}+C$. Из начального условия $l(0)=0$, имеем $C=0$. При этом длина винтовой линии равна

$$L_{\Gamma}=T\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Следовательно, $t=\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Отсюда натуральное уравнение винтовой линии в координатной форме запишется в виде:

$$\Gamma=\left\{x=a\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}; y=a\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}; z=b\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\},$$

где $0\le l\le T\sqrt{a^2+b^2}$.

г) дифференциал длины дуги равен

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt\,.$$

Для винтовой линии имеем

$$dl=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,dt\,.$$

Тема 10 Кривизна кривой

1 Вычислить кривизну данных кривых в указанных точках:

а) $y=x^2$, $M_0(0;0)$, $M_1(1;1)$;

б) $x^2 - xy + y^2 = 1$, $M(1;1)$;

в) $x = t^2$, $y = t - \dfrac{1}{3}t^3$ при $t = 1$;

г) $r = a(1 - \cos\varphi)$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

2 Найти радиусы кривизны кривых:

а) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; в) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;

б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; г) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

3 Вычислить координаты центров кривизны кривых в указанных точках:

а) $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$, $M(0;a)$; б) $y = x e^x$, $M\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$.

4 Составить уравнения эволют кривых:

а) $y = x^3$;

б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

в) $x = t\sin t + \cos t$, $y = t\cos t - \sin t$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Вычислить кривизну кривой $y = \ln x$ в точке $x_0 = 1$.

Р е ш е н и е. Находим $y' = \dfrac{1}{x}$, $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$. Тогда кривизна кривой $y = \ln x$ в любой ее точке M с абсциссой x есть

$$K = \frac{\left|-\dfrac{1}{x^2}\right|}{\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \frac{|x|}{\left(1 + x^2\right)^{3/2}}.$$

В точке $x_0 = 1$ имеем

$$K\Big|_{x_0=1} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2 Найти кривизну в любой точке циклоиды

$$\Gamma = \{ x = a(t - \sin t); y = a(1 - \cos t); 0 \le t \le 2\pi \}$$

Решение. Имеем

$$x' = a(1 - \cos t),\ x'' = a\sin t,$$

$$y' = a\sin t,\ y'' = a\cos t.$$

Тогда

$$x'y'' - y'x'' = a^2\left(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t\right) = -a^2(1 - \cos t),$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right) = 2a^2(1 - \cos t).$$

Подставляя в формулу для вычисления кривизны, получим

$$K = \frac{\left|x'y'' - x''y'\right|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|-a^2(1 - \cos t)\right|}{\left(2a^2(1 - \cos t)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,a\sqrt{1 - \cos t}}.$$

3 Найти координаты центра кривизны кривой $x^3 + y^4 = 2$ в точке $M(1;1)$.

Решение. Дифференцируем уравнение два раза:

$$3x^2 + 4y^3 \cdot y' = 0,\ 6x + 12y^2 \cdot y'^2 + 4y^3 \cdot y'' = 0.$$

Так как $x = 1$, $y = 1$, то из первого выражения находим, что $y' = \frac{-3}{4}$, а из второго получаем $y'' = -\frac{51}{16}$.

Подставляя в формулы для координат центра кривизны, получим

$$\xi = x - \frac{\left(1 + y'^2\right)y'}{y''} = 1 - \frac{\left(1 + \frac{9}{16}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{51}{16}} = \frac{43}{68},$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = 1 + \frac{1 + \frac{9}{16}}{-\frac{51}{16}} = \frac{26}{51}, \text{ т. е. } C\left(\frac{43}{68}; \frac{26}{51}\right).$$

4 Найти эволюту эллипса $\Gamma = \{x = a\cos t; y = b\sin t; 0 \le t \le 2\pi\}$.

Решение. Имеем

$$x' = -a\sin t,\ y' = b\cos t,\ x'' = -a\cos t,\ y'' = -b\sin t.$$

Подставляя в формулы для эволюты, получим

$$\xi = \frac{a^2 + b^2}{a} \cos^3 t\,,\ \eta = \frac{b^2 + a^2}{b} \sin^3 t\,.$$

Данные уравнения являются параметрическими уравнениями астроиды (рисунок 3. 15).

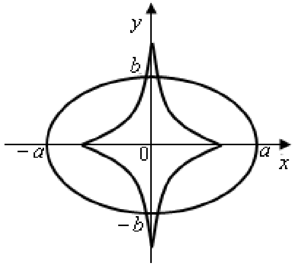

Рисунок 3. 15 – Эллипс и его эволюта

5 Составить уравнение эволюты параболы

$$y^2 = x + \frac{1}{2}\,.$$

Решение. Продифференцируем два раза уравнение параболы:

$$2yy' = 1\,,\ y' = \frac{1}{2y}\,,$$

$$2y'^2 + 2yy'' = 0\,,\ y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{4y^3}\,.$$

Определяем координаты центра кривизны:

$$\xi = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - y'x''} = y^2 - \frac{1}{2} - \frac{\left(1 + \frac{1}{4y^2}\right)\cdot\frac{1}{2y}}{-\frac{1}{4y^3}} = 3y^2\,,$$

$$\eta = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - y'x''} = y + \frac{1 + \frac{1}{4y^2}}{-\frac{1}{4y^3}} = y - 4y^3 - y = -4y^3\,.$$

Получаем уравнение эволюты в параметрической форме:

$$\xi = 3y^2\,,\ \eta = -4y^3\,.$$

Исключив параметр y, найдем уравнение эволюты в явном виде

$$\eta^2 = \frac{16}{27}\xi^3 .$$

Раздел 4 Интегральное исчисление функции действительной переменной

Тема 1 Первообразная и неопределенный интеграл

1 Используя основные правила интегрирования и таблицу интегралов, вычислить следующие неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^3}{x^2}dx$;

б) $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{1}{x^7}\right)dx$;

в) $\int \frac{6x^4 + 5x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 9x + 11}{x^2}dx$;

г) $\int \frac{x^4}{x^2 - 1}dx$;

д) $\int \frac{3}{4 + x^2}dx$;

е) $\int \frac{dx}{9 - x^2}$;

ж) $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$;

и) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$;

к) $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx$;

л) $\int \frac{x^2}{x^2 + 1}dx$;

м) $\int \frac{2 - \sin^2 x}{\sin^2 x}dx$;

н) $\int \mathrm{th}^2\, x dx$.

2 Доказать, что функция $f(x) = \mathrm{sgn}\, x$ не имеет первообразной на любом промежутке, содержащем точку $x = 0$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Используя основные свойства неопределенного интеграла, вычислить интегралы:

а) $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx$;

д) $\int (1 - \sqrt{x})^3 dx$;

б) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$;

е) $\int \cos^2 \frac{x}{2}dx$;

в) $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

ж) $\int \frac{x^2}{1 - x^2}dx$;

г) $\int \frac{3x^4+2x^3+5x^2-7x+8}{x^2}dx$ и) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$.

Решение. а) имеем:

$$\int 2^x \cdot 3^{2x}dx = \int \left(2\cdot 3^2\right)^x dx = \int 18^x dx = \frac{18^x}{\ln 18} + C.$$

б) имеем:

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}x - x + C.$$

в) имеем $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)dx =$

$$= \int (1+\sin x)dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C.$$

г) имеем:

$$\int \frac{3x^4+2x^3+5x^2-7x+8}{x^2}dx = \int \left(3x^2 - 2x + 5 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}\right)dx =$$

$$= 3\int x^2 dx - 2\int x dx + 5\int dx - 7\int \frac{dx}{x} + 8\int \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 3\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 5x - 7\cdot\ln x + 8\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= x^3 - x^2 + 5x - 7\ln x - \frac{8}{x} + C.$$

д) имеем: $\int (1-\sqrt{x})^3 dx = \int \left(1 - 3\sqrt{x} + 3x - \sqrt{x^3}\right)dx =$

$$= \int dx - 3\int \sqrt{x}dx + 3\int x dx - \int x^{\frac{3}{2}}dx = x - 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C =$$

$$= x - 2x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C.$$

е) имеем: $\int \cos^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1+\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx =$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C.$$

ж) имеем: $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx = \int \frac{x^2-1+1}{1-x^2}dx = \int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)dx =$

$= -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$.

и) имеем: $\int\sqrt{1-\sin 2x}dx = \int\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}dx =$

$= \int\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}dx = \int|\sin x - \cos x|dx =$

$= (\sin x - \cos x)\cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C$.

Тема 2 Общие методы интегрирования

1 Вычислить методом замены переменной:

а) $\int\frac{dx}{\sin x}$;

б) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$;

в) $\int \operatorname{ctg} x dx$;

г) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^6}}$;

д) $\int x5^{-x^2}dx$;

е) $\int\frac{x^2dx}{(1+x)^6}$;

ж) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-6x-3x^2}}$;

и) $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

к) $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;

л) $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh} x\, dx$;

м) $\int e^{\cos 2x}\sin 2x dx$;

н) $\int\frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}dx$;

о) $\int x\sqrt{x-8}\,dx$;

п) $\int\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx$.

2 Вычислить методом интегрирования по частям:

а) $\int x \operatorname{arctg}^3 x\, dx$;

б) $\int\frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

в) $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$;

г) $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$;

д) $\int(x+4)\cos 3x\, dx$;

е) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

П р и м е р ы   о ф о р м л е н и я   р е ш е н и я

1 С помощью метода замены переменной найти интегралы:

а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; д) $\int \mathrm{tg}\, xdx$;

б) $\int \frac{x^3}{x^4-2}dx$; е) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$;

в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; ж) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$;

г) $\int \frac{dx}{x\ln x \ln\ln x}$; и) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;.

Р е ш е н и е . а) имеем:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{2}d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \left[1-x^2 = t\right] = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}2t^{\frac{1}{2}} + C = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C .$$

б) имеем: $$\int \frac{x^3}{x^4-2}dx = \int \frac{\frac{1}{4}d(x^4)}{(x^4)^2-2} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}d\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)}{-2\left(1-\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x^4}{\sqrt{2}-x^4}\right| + C .$$

в) имеем: $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{-d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} =$$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|+C\ .$$

г) имеем:

$$\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\int\frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x}=\ln\left|\ln\ln x\right|+C\ .$$

д) имеем:

$$\int \mathrm{tg}x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=[u=\cos x]=-\int\frac{du}{u}=$$

$$=-\ln\left|\cos x\right|+C\ .$$

е) имеем:

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x(\mathrm{tg}^2 x+2)}=\int\frac{\sqrt{2}d\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)}{2\left(1+\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)+C\,.$$

ж) имеем:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}=\begin{bmatrix}\sqrt{3x+1}=u, x=\dfrac{u^2-1}{3}\\ 3x+1=u^2, dx=\dfrac{2}{3}udu\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{\frac{2}{3}udu}{u\frac{u^2-1}{3}}=2\int\frac{du}{u^2-1}=\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+c=\ln\left|\frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+1}\right|+C\,.$$

и) имеем: $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\begin{bmatrix}x=\sin t\\ dx=\cos t dt\end{bmatrix}=\int\frac{\cos t dt}{\cos^3 t}=\mathrm{tg}\,t+C=$

$$=\mathrm{tg}(\arcsin x)+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C\,.$$

2 Используя метод интегрирования по частям, вычислить следующие интегралы:

а) $\int \operatorname{arctg} x dx$; г) $\int (x-1)\ln x dx$;

б) $\int x^2 e^{-x} dx$; д) $\int \sin(\ln x) dx$;

в) $\int x^2 \sin 2x dx$; е) $\int e^{-x} \cos 2x dx$.

Решение. а) имеем:

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x, dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, x = v \end{bmatrix} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C.$$

б) имеем:

$$\int x^2 e^{-x} dx = \begin{bmatrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^2 e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx\right) =$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

в) имеем:

$$\int x^2 \sin 2x dx = \begin{bmatrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = \sin 2x dx, v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} =$$

$$= x^2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + \int x\cos 2x dx = \begin{bmatrix} u = x, dv = \cos 2x dx \\ du = dx, v = -\dfrac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin x +$$

$$+ \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

г) имеем:

$$\int (x-1)\ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x;\ du = \dfrac{1}{x}dx; \\ dv = (x-1)dx;\ v = \dfrac{(x-1)^2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2}\ln x - \int \frac{(x-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{(x-1)^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-2x+1}{x}dx =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int\left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{(x-1)^2}{2}\ln x -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-2x+\ln x\right).$$

д) имеем: $\int \sin(\ln x)dx = \begin{bmatrix} u = \sin\ln x, du = \dfrac{1}{x}\cos\ln x\, dx \\ dv = dx, v = x \end{bmatrix} =$

$$= x\sin\ln x - \int \cos\ln x\, dx = x\sin\ln x - \left(x\cos\ln x + \int \sin\ln x dx\right).$$

Пусть $I = \int \sin\ln x dx$. Тогда

$$I = x(\sin\ln x - \cos\ln x) - I .$$

Откуда $I = \dfrac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C$.

е) имеем: $\int e^{-x}\cos 2x dx = \begin{bmatrix} u = e^{-x};\ du = -e^{x}dx; \\ dv = \cos 2x;\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} =$

$$= -e^{-x}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\int e^{-x}\cdot\sin 2x dx = \begin{bmatrix} u = e^{-x};\ du = -e^{x}dx; \\ dv = \sin 2x;\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x dx\right) =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x + \frac{e^{-x}}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\int e^{-x}\cos 2x dx .$$

Отсюда

$$\int e^{-x}\cos 2x dx = -\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x + \frac{e^{-x}}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\int e^{-x}\cos 2x dx .$$

Выразим искомый интеграл

$$\int e^{-x}\cos 2x dx\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{e^{-x}}{4}\left(-2\sin 2x + \cos 2x\right).$$

Тогда

$$\int e^{-x}\cos 2x dx = \frac{e^{-x}\left(-2\sin 2x + \cos 2x\right)}{5}.$$

Тема 3 Интегрирование рациональных функций

Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$;

б) $\int \frac{x^2+x+2}{x^3-x^2+x-1}dx$;

в) $\int \frac{x^4+5}{x^2+1}dx$;

г) $\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx$;

д) $\int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)^2}$;

е) $\int \frac{x^3+2x+1}{x^3+1}dx$;

ж) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$;

и) $\int \frac{x^2-6x+8}{x-5}dx$;

к) $\int \frac{dx}{\left(x^2-2x\right)^2}$;

л) $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx$;

м) $\int \frac{dx}{x^4+1}$;

н) $\int \frac{xdx}{x^3+1}$.

П р и м е р ы   о ф о р м л е н и я   р е ш е н и я

1 Найти интегралы от рациональных функций:

а) $\int \frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}dx$;

б) $\int \frac{x^5-x+1}{x^3+x}dx$;

г) $\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx$;

д) $\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}dx$.

в) $\int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}dx$;

Решение. а) выделим из неправильной дроби целую часть, деля числитель на знаменатель

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}.$$

Разложим полученную в результате дробь на элементарные слагаемые:

$$x^4+3x^2=x^2\left(x^2+3\right).$$

Тогда

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}.$$

Приведем к общему знаменателю в правой части

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}=\frac{Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+(Cx+D)x^2}{x^2\left(x^2+3\right)}.$$

Отсюда

$$1=Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+(Cx+D)x^2$$

Раскроем скобки в правой части и сгруппируем:

$$1=x^3(A+C)+x^2(B+D)+x\cdot 3A+3B.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$x^3: 0=A+C$,

$x^2: 0=B+D$,

$x^1: 0=3A$,

$x^0: 1=3B$.

Отсюда $A=0$, $B=\frac{1}{3}$, $C=0$, $D=-\frac{1}{3}$.

Следовательно,

$$\frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3\left(x^2+3\right)}.$$

Тогда

$$\int\frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}dx=\int\left(2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3\left(x^2+3\right)}\right)dx=$$

$$= 2\int x dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+3} =$$

$$= 2\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= x^2 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C;$$

б) подынтегральное выражение является неправильной рациональной дробью. Выделим целую часть подынтегральной функции:

$$\frac{x^5 - x + 1}{x^3 + x} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^3 + x}$$

Разложим на элементарные последнюю дробь:

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)}.$$

Методом неопределенных коэффициентов, найдем неизвестные коэффициенты A, B, C. Имеем

$$1 = (A+B)x^2 + Cx + A.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C=0, \\ A=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=0. \end{cases}$$

Значит,

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Подставляя полученное выражение в интеграл $\int \frac{dx}{x^3+x}$, получим

$$\int \frac{dx}{x^3+x} = \int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int\frac{dx}{x} - \int\frac{xdx}{x^2+1} =$$

$$= \int\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Тогда

$$\int \frac{x^5 - x + 1}{x^3 + x}dx = \int\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^3+x}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C;$$

в) подынтегральное выражение является правильной рациональной дробью. Разложим ее на элементарные дроби:

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-2}.$$

Используя метод частных значений, получим:

$$A = \frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)}\Big|_{x=0} = 1,$$

$$B = \frac{x+2}{x(x+1)(x-2)}\Big|_{x=1} = -\frac{3}{2},$$

$$C = \frac{x+2}{x(x-1)(x-2)}\Big|_{x=-1} = -\frac{1}{6},$$

$$D = \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}\Big|_{x=2} = \frac{2}{3}.$$

Тогда

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x} - \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{x-2}.$$

Подставим в исходный интеграл

$$\int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{x-2}\right)dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}(x+1)^{\frac{1}{6}}}\right| + C;$$

г) запишем исходный интеграл в виде:

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx = \int\left(x + \frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}\right)dx =$$

$$=\frac{x^2}{2}+\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{4x+3}{2x^2+2x+1}dx\ .$$

Подынтегральное выражение в третьем слагаемом есть правильная рациональная дробь. Разложим ее на элементарные и найдем коэффициенты:

$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{2x^2+2x+1}=\frac{1}{x-1}+\frac{4x+3}{2x^2+2x+1}\ .$$

Подставим в интеграл и вычислим его

$$\int\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+\int\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}dx+$$

$$+\int\frac{dx}{2x^2+2x+1}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+\int\frac{d\left(2x^2+2x+1\right)}{2x^2+2x+1}+\int\frac{dx}{\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+\operatorname{arctg}(2x+1)+C\ ;$$

д) поскольку

$$x^5+x^4-x^3-x^2=x^2(x+1)^2(x-1),$$

то

$$\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}+\frac{E}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\ .$$

Тогда

$$\int\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}dx=\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C\ .$$

Тема 4 Интегрирование иррациональностей

1 Вычислить следующие интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx$;

б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$;

в) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$;

г) $\int \frac{\left(1-\sqrt[6]{x^3}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$;

д) $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$;

е) $\int \sqrt{x^2-2x+10}\,dx$;

ж $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

и) $\int \frac{x^{10}dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$;

л) $\int \frac{dx}{\left(x^2-3\right)\sqrt{4-x^2}}$;

м) $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}dx$;

н) $\int x^2\sqrt{x^2-4}\,dx$.

2 Выразить через функции *Si(x), li(x), $\Phi_0(x)$* и элементарные функции интегралы:

а) $\int \frac{e^x}{x}dx,\ x<0$;

б) $\int \frac{x\sin x-\cos x}{x^2}dx$;

в) $\int e^{-(2x^2+4x-5)}dx$;

г) $\int \Phi_0\left(x\right)dx$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Вычислить следующие неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^3}-\sqrt{2x+1}}$;

в) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}$;

г) $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$;

е) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$;

и) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Р е ш е н и е . а) имеем:

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} x = t^4, \\ dx = 4t^3dt \end{bmatrix} = \int \frac{1+t}{t^4+t^2}4t^3dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt =$$

$$= 4\int\left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt = 4\int\left(1+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right) = 4t + 2\ln\left(t^2+1\right) -$$

$$-4\operatorname{arctg} t + C = \left[t = \sqrt[4]{x}\right] = 4\sqrt[4]{x} + 2\ln\left(\sqrt[2]{x}+1\right) - 4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C.$$

б) имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^3} - \sqrt{2x+1}} = \begin{bmatrix} 2x+1 = t^6, \\ x = \frac{1}{2}\left(t^6-1\right), \\ dx = 3t^5dt \end{bmatrix} = \int \frac{3t^5dt}{t^4-t^3} = 3\int\frac{t^2dt}{t-1} =$$

$$= 3\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 3\int\left(t+1-\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + C = \left[t = \sqrt[6]{2x+1}\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1} + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right| + C.$$

в) $\displaystyle \int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1} = \left[t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, dx = \frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}\right] =$

$$= -3\int\frac{dt}{t^3-1} = -\frac{1}{2}\ln\frac{(1-t)^2}{1+t+t^2} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

г) имеем:

$$\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx = \begin{bmatrix} t = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \\ x = \dfrac{2t-1}{1-t^2}, dx = 2\dfrac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int\frac{-2tdt}{1-t^2} = \ln\left|1-t^2\right| + C = \left[t = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right] =$$

$$=\ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right|+C\;;$$

д) имеем:

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}=\begin{bmatrix}x-1=\dfrac{1}{t},\\ dx=-\dfrac{1}{t^2}dt\end{bmatrix}=\int\frac{-\dfrac{1}{t^2}dt}{\dfrac{1}{t}\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{t}+1\right)^2}}=$$

$$=-\int\frac{\sqrt{t^2}\,dt}{t\sqrt{-1-2t}}=-\int\frac{|t|dt}{t\sqrt{-1-2t}}=\begin{bmatrix}|x|<1\Rightarrow x-1<0\\ \Rightarrow\;\; t<0\end{bmatrix}=$$

$$=-\int\frac{-t\,dt}{t\sqrt{-1-2t}}=\int\frac{dt}{\sqrt{-1-2t}}=\int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}d(-1-2t)=-(-1-2t)^{\frac{1}{2}}+C=\left[t=\frac{1}{x-1}\right]=$$

$$=-\left(-1-2\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}+C=C-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\;;$$

е) имеем:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\begin{bmatrix}x=a\cos t;\\ dx=-a\sin t\,dt\end{bmatrix}=\int\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}\,(-a)\sin t\,dt=$$

$$=-a^2\int\sqrt{1-\cos^2 t}\,\sin t\,dt=-a^2\int\sin^2 t\,dt=\frac{-a^2}{2}\int(1-\cos 2t)\,dt=$$

$$=-\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\left[t=\arccos\frac{x}{a}\right]=$$

$$=-\frac{a^2}{2}\left(\arccos\frac{x}{a}-\frac{1}{4}\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\right)+C=$$

$$=-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+\frac{a^2x}{8a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C=$$

$$=-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+\frac{x}{8}\sqrt{a^2-x^2}+C\;;$$

ж) имеем: $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \left[\begin{array}{l} a=b=1, m=0, n=4, p=-\frac{1}{4} \\ 1+x^{-4}=t^4, dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt \end{array} \right] =$

$$= -\int \frac{t^2dt}{t^4-1} = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t^2-1} + \int \frac{dt}{t^2+1} \right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C;$$

и) имеем:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \left[\begin{array}{l} a=b=1; p=-\frac{3}{2} \notin \mathbf{Z}; m=-2; n=2; \\ \frac{m+1}{n} = -\frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}; \frac{m+1}{n} + p = -2 \in \mathbf{Z}; \\ t^2 = x^{-2}+1; x = \left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}; dx = -\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}} 2tdt \end{array} \right] =$$

$$= -\int \left(t^2-1\right)\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}} tdt = -\int \frac{t^2-1}{t^2}dt = -\int dt + \int t^{-2}dt =$$

$$= -t - \frac{1}{t} + c = \left[t = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right] = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + C.$$

2 Выразить через функции $Si(x)$, $li(x)$ и элементарные функции интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\ln^2 x}$, $x<1$; б) $\int Si(x)dx$.

Р е ш е н и е. а) имеем:

$$\int \frac{dx}{\ln^2 x} = \int \frac{xdx}{x\ln^2 x} = \left[\begin{array}{l} u=x, dv=\frac{dx}{x\ln^2 x}, \\ du=dx, v=\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{x}{\ln x} + \int \frac{dx}{\ln x} = -\frac{x}{\ln x} + li(x) + C;$$

б) имеем:

$$\int Si(x)dx = \left[\begin{array}{l} u = Si(x),\ dv = dx, \\ du = d\left(Si(x)\right) = d\left(\int \frac{\sin x}{x}dx\right) = \frac{\sin x}{x}dx, \\ v = x \end{array}\right] =$$

$$= xSi(x) - \int \sin x dx = xSi(x) + \cos x + C .$$

Тема 5 Интегрирование трансцендентных функций

1 Найти интегралы:

а) $\int \sin 3x \cos 5x dx$;

б) $\int \cos\frac{x}{6}\cos\frac{5x}{6}dx$;

в) $\int \sin x \cos^7 x dx$;

г) $\int \frac{dx}{9+4\cos x}$;

д) $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$;

е) $\int \mathrm{ch}^2 x\, \mathrm{sh}^2 x\, dx$;

ж) $\int \mathrm{sh}^3 x\, dx$;

и) $\int \mathrm{ch}\, 5x\, \mathrm{sh}\, x\, dx$;

к) $\int \frac{e^{2x}dx}{5+e^x}$;

л) $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x}dx$;

м) $\int \frac{\sin x dx}{1-\sin x}$;

н) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$;

о) $\int \frac{dx}{2+3\sin x+2\cos x}$;

п) $\int \mathrm{tg}^5 x dx$;

р) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x}$;

с) $\int \mathrm{ch}^2 x\, \mathrm{sh}\, x\, dx$;

т) $\int x\, \mathrm{ch}\, 2x\, dx$;

у) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$;

ф) $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$;

х) $\int \sqrt{\mathrm{th}\, x}dx$.

П р и м е р ы   о ф о р м л е н и я   р е ш е н и я

Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$;

е) $\int \sin 2x \cdot \cos 5x dx$;

б) $\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx$

в) $\int \cos^2 x \sin x dx$;

г) $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$;

д) $\int \mathrm{tg}^2\, x dx$;

ж) $\int \sin 7x \cdot \sin 5x dx$;

и) $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x} + 1}$;

к) $\int \mathrm{ch}^2\, x\, \mathrm{sh}^3\, x\, dx$.

***Решение*. а) подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x$ и $\cos x$. Применяя универсальную тригонометрическую подстановку $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, получим:**

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dx}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + c = \left[tg\frac{x}{2} = t \right] =$$

$$= -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C;$$

б) подынтегральная функция является нечетной относительно $\sin x$. Поэтому применяем подстановку $\cos x = t$. Тогда получим

$$\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \cos x,\ \sin^2 x = 1 - t^2, \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1, \\ dt = -\sin x dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} dt = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{array} \right] =$$

$$=\int \frac{\sqrt{1-t^2}-\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{2t^2-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt=\int \frac{t^2-2}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int dt-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{d\left(2\sqrt{2}t\right)}{\left(2\sqrt{2}t\right)^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right|+C=$$

$$=[t=\cos x]=\frac{\cos x}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C\,;$$

в) имеем: $\int \cos^2 x\sin x dx=-\int \cos^2 x d(\cos x)=-\frac{\cos^3 x}{3}+C$;

г) имеем:

$$\int \cos^2 x\sin^2 x dx=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx=\frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int \cos 4x dx=\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C\,;$$

д) имеем:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx=\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=t;\\ x=\operatorname{arctg} t;\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right]=\int \frac{t^2dt}{1+t^2}=\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=\int dt-\int \frac{1}{1+t^2}dt=$$

$$=t+\operatorname{arctg} t+C=[t=\operatorname{tg} x]=\operatorname{tg} x+\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)+C=\operatorname{tg} x+x+C\,;$$

е) имеем:

$$\int \sin 2x\cdot\cos 5x dx=\frac{1}{2}\int (\sin 7x+\sin(-3x))dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \sin 7x dx-\frac{1}{2}\int \sin 3x dx=-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C\,;$$

ж) имеем:

$$\int \sin 7x\sin 5x dx=\left[\sin 5x\sin 7x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 12x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 12x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 12x}{12}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{24}\sin 12x+C\ ;$$

и) имеем:

$$\int\frac{e^{3x}dx}{e^{2x}+1}=\begin{bmatrix} t=e^x, \\ x=\ln t,\ dx=\dfrac{dt}{t}\end{bmatrix}=\int\frac{t^3\cdot\dfrac{dt}{t}}{t^2+1}=\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=t-\operatorname{arctg}t+C=\left[t=e^x\right]=e^x-\operatorname{arctg}\left(e^x\right)+C\ ;$$

к) имеем:

$$\int\operatorname{ch}^2 x\operatorname{sh}^3 x\,dx=\int\operatorname{ch}^2 x\operatorname{sh}^2 x\operatorname{sh}x\,dx=\int\operatorname{ch}^2 x\left(\operatorname{ch}^2 x-1\right)d\left(\operatorname{ch}x\right)=$$

$$=\int\operatorname{ch}^4 x\,d\left(\operatorname{ch}x\right)-\int\operatorname{ch}^2 x\,d\left(\operatorname{ch}x\right)=\frac{\operatorname{ch}^5 x}{5}-\frac{\operatorname{ch}^3 x}{5}+C\ .$$

Тема 6 Определенный интеграл и формула Ньютона-Лейбница

1 Вычислить по определению интегралы:

а) $\int_0^5(1+x)dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$.

2 Определить знаки интегралов, не вычисляя их:

а) $\int_{-2}^1\sqrt[3]{x}dx$; б) $\int_{-1}^1 x^3e^x dx$.

3 Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:

а) $\int_0^1 e^{-x}\cos^2 x\,dx$ и $\int_0^1 e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$; б) $\int_1^2\frac{dx}{x}$ и $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

4 Найти среднее значение функции на данном отрезке:

а) x^3, $[0;1]$; б) $\cos x$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5 Оценить интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{8+x^3}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}$.

6 Доказать, что если функция $f(x)$ четная на $[-a;a]$, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

7 Найти производные следующих функций:

а) $\int\limits_{x}^{0}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^3}}dt$; б) $\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\sin\left(t^2\right)dt$.

8 Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{-2}^{2}x^3dx$; г) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx$;

б) $\int\limits_{1}^{2}e^{-x}dx$; д) $\int\limits_{2}^{5}\dfrac{dx}{3x+1}$;

в) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x^2dx}{1+x^6}$; е) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$.

9 Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int\limits_{1}^{6}\dfrac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$; б) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8}\dfrac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; в) $\int\limits_{0}^{3}x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

10 Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int\limits_{1}^{e}\ln^2 x\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}x\arcsin x\,dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{xdx}{\cos^2 x}$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 x^2 dx$, рассматривая его как предел интегральных сумм.

Решение. Разделим отрезок интегрирования $[1;2]$ на n равных частей длины $\Delta x = \frac{1}{n}$. Точки деления

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1 + \frac{1}{n},\ x_2 = 1 + \frac{2}{n},\ \ldots,\ x_{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n},\ x_n = 2.$$

В качестве точек ξ_k выберем, например, левые концы каждого частичного отрезка. Тогда

$$f(x_0) = 1,\ f(x_1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2,\ \ldots,\ f(x_{n-1}) = \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{n}\left(1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (2n-1)^2\right) = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{2n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)$$

.

Применяя формулу суммы квадратов целых чисел

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

находим

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = \frac{14n^2 - 9n + 1}{6n^2}.$$

Тогда

$$\int_1^2 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{14n^2 - 9n + 1}{6n^2} = \frac{7}{3}.$$

2 Оценить интеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$.

Решение. При $0 \le x \le 1$ имеем $1 \le 1 + x^4 \le 2$.

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \le 1.$$

Отсюда $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $M = 1$, $b - a = 1$.

Поэтому $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le I \le 1$.

3 Найти $I'(x)$, если $I(x) = \int\limits_0^{x^2} e^{-t^2} dt$.

Решение. Используя теорему 6, получим

$$I'(x) = \left(\int\limits_0^{x^2} e^{-t^2} dt \right)' = e^{-\left(x^2\right)^2} \cdot \left(x^2\right)' = 2xe^{-x^4}.$$

4 Вычислить интегралы с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; в) $\int\limits_1^6 \dfrac{dx}{\sqrt{3+x}}$;

б) $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{x}$; г) $\int\limits_{-1}^0 e^{-2x} dx$.

Решение. а) имеем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = 1;$$

б) имеем:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2;$$

в) имеем:

$$\int\limits_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = \int\limits_1^6 (3+x)^{-1/2} d(3+x) = 2\sqrt{3+x}\Big|_1^6 = 2\left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right) = 2;$$

г) имеем:

$$\int_{-1}^{0} e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}\left(e^{0}-e^{2}\right) = \frac{e^{2}-1}{2}.$$

5 Вычислить интеграл $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^{2}}\,dx$.

Решение. Имеем:

$$\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^{2}}\,dx = \left[\begin{array}{l} x=\sin t, \\ dx=\cos t dt, \\ x=0 \Rightarrow t=0, \\ x=1 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right] = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^{2}t}\,\cos t dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2} t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

6 Вычислить интеграл $\int_{1}^{e}\ln x dx$.

Решение. Имеем

$$\int_{1}^{e}\ln x dx = \left[\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}dx; \\ dv=dx;\ \ v=x \end{array}\right] = x\ln x\Big|_{1}^{e} - \int_{1}^{e}\frac{1}{x}x dx = e - \int_{1}^{e}dx =$$

$$= e - x\Big|_{1}^{e} = 1.$$

Тема 7 Геометрические приложения определенного интеграла

1 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$ и прямыми $x=e$, $x=e^{2}$, $y=0$.

2 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y^{2}=4x$ и прямой $x=4y$.

3 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^{2}+2x$ и прямой $y=x+2$.

4 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{27}{x^2+9}$ и $y=\frac{x^2}{6}$.

5 Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой

$$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t.$$

6 Найти площадь петли кривой $x=a\left(t^2+1\right)$, $y=b\left(t^3-3t\right)$.

7 Найти площадь одного лепестка кривой $r=a\sin 2\varphi$.

8 Найти площадь фигуры, ограниченной двумя последовательными витками логарифмической спирали $r=e^{\varphi}$, начиная с $\varphi=0$.

9 Найти длину параболы $y=x^2$ от $x=0$ до $x=1$.

10 Найти длину одной арки циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi.$$

11 Найти длину петли кривой $x=t^2$, $y=t\left(\frac{1}{3}-t^2\right)$.

12 Найти длину кардиоиды $r=2(1-\cos\varphi)$.

13 Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси кардиоиды $r=2a(1+\cos\varphi)$.

14 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги цепной линии $y=\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x$, $0\le x\le 3$.

15 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x=\cos t$, $y=\sin 2t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$, и осью Ox.

16 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $2y^2=x^3$, $x=4$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной аркой синусоиды $y=\sin x$ и прямой $y=0$ (рисунок 7. 1).

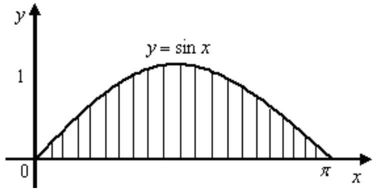

Рисунок 7. 1 – Фигура, ограниченная линиями
$y = \sin x$, $y = 0$

Решение. Находим:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = 2 .$$

2 Вычислить площадь эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, где $0 \le t \le 2\pi$ (рисунок 7. 2).

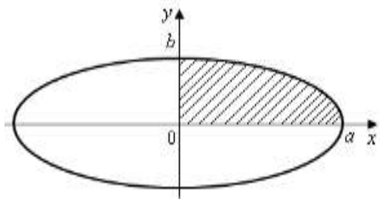

Рисунок 7. 2 – Эллипс

Решение. Оси координат совпадают с осями симметрии данного эллипса и поэтому делят его на четыре одинаковые части. Следовательно, $S = 4S_1$, где S_1 – площадь части эллипса, расположенная в первом квадранте. Тогда

$$S = 4S_1 = 4\int_0^a y dx = \left[\begin{array}{l} x = a\cos t,\ y = b\sin t, \\ dx = -a\sin t\, dt, \\ x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}, \\ x = a \Rightarrow t = 0. \end{array}\right] = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t dt =$$

$$= -2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)\, dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab .$$

3 Вычислить площадь криволинейного сектора, ограниченного кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$, где $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Р е ш е н и е. Получим:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)d\varphi=\frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\int\limits_{0}^{2\pi}1d\varphi+2\int\limits_{0}^{2\pi}\cos\varphi d\varphi++\int\limits_{0}^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}+2\cos\varphi\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right)=\frac{3}{2}\pi a^2 .$$

4 Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=x^{\frac{3}{2}}$, если $0\le x\le 5$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$l=\int\limits_{0}^{5}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5=\frac{235}{27} .$$

5 Вычислить длину астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, если $0\le t\le 2\pi$.

Р е ш е н и е. В силу симметричности астроиды относительно осей получим:

$$l=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt=\begin{bmatrix}x'=-3a\cos^2 t\sin t,\\ y'=3a\cos t\sin^2 t\end{bmatrix}=$$

$$=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt=6a\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t dt=6a .$$

6 Вычислить длину первого витка спирали Архимеда $r=a\varphi$.

Р е ш е н и е. Первый виток спирали образуется при изменении полярного угла $0\le\varphi\le 2\pi$. Поэтому

$$l=\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}d\varphi=a\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi=$$

$$=a\left(\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right).$$

7 Вычислить площадь S поверхности, полученной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, вокруг оси Ox.

Решение. Имеем:

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2 + (a(1-\cos t))^2}\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{64}{3}\pi a^2 .$$

8 Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Решение. Пересечем эллипсоид плоскостью $x = h$. В сечении получим эллипс

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)} = 1, \\ x = h. \end{cases}$$

Площадь поперечного сечения равна $S(x) = \pi bc\left(1 - \dfrac{h^2}{a^2}\right)$.

Тогда

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)dh = \pi bc\left(x - \frac{h^2}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc .$$

9 Вычислить объем тела, получающегося от вращения вокруг оси одной арки синусоиды $y = \sin x$.

*Решение***.** Имеем

$$S = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos 2x x dx\right) = \frac{\pi^2}{2} .$$

Тема 8 Физические приложения определенного интеграла

1 Какую работу затрачивает подъемный кран при извлечении железобетонной надолбы со дна реки глубиною в 5 м, если надолба имеет форму правильного тетраэдра с ребром 1м, плотность железобетона 2500 кг/м^3.

2 Найти работу, затраченную на выкачивание воды из сосуда, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a, радиус r.

3 Водопроводная труба имеет диаметр 6 см.; один ее конец соединен с баком, в котором уровень воды на 100 см выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти полное давление на заслонку.

4 Найти величину давления воды на вертикальную стенку в форме полукруга, диаметр которого 6 м и находится на поверхности воды (рисунок 8. 1).

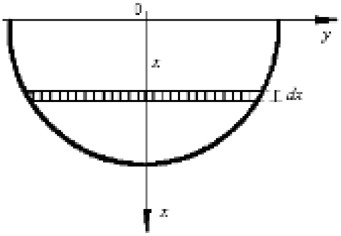

Рисунок 8. 1 – К задаче 4

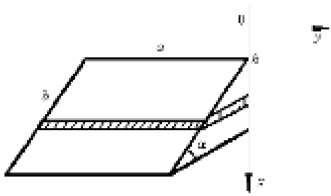

Рисунок 8. 2 – К задаче 6

5 Найти давление бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотою $h = 3{,}5$ м и радиусом $r = 1{,}5$ м, на его стенки, если плотность бензина $\rho = 900$ кг/м^3.

6 Какое давление испытывает прямоугольная пластинка длиною a и шириною b, $a > b$, если она наклонена к горизонту жидкости под углом α и ее большая сторона находится на глубине h (рисунок 8. 2).

7 Найти момент инерции относительно оси Oy площади эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

8 Найти статические моменты и моменты инерции дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в первой четверти.

9 Найти координаты центра тяжести параболического сегмента, ограниченного линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

Примеры оформления решения

1 Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей Ox и Oy дуги цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ при $0 \le x \le 1$.

Решение. Имеем

$$y' = \operatorname{sh} x, \ \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + (\operatorname{sh} x)^2} = \operatorname{ch} x.$$

Тогда

$$M_x = \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 + \operatorname{ch} 2x) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sh} x \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}(2 + \operatorname{sh} 2),$$

$$M_y = \int_0^1 x \operatorname{ch} x\, dx = \begin{bmatrix} u = x, dv = \operatorname{ch} x\, dx, \\ du = dx, v = \operatorname{sh} x \end{bmatrix} = x \operatorname{sh} x\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \operatorname{sh} dx = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} x\Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1,$$

$$I_x = \int_0^1 \operatorname{ch}^3 x\, dx = \int_0^1 (1 + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch} x\, dx = \left(\operatorname{sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x \right)\Bigg|_0^1 = \operatorname{sh} 1 + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 1,$$

$$I_y = \int_0^1 x^2 \operatorname{ch} x\, dx = \begin{bmatrix} u = x^2, dv = \operatorname{ch} x\, dx, \\ du = 2x dx, v = \operatorname{sh} x \end{bmatrix} = x^2 \operatorname{sh} x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x \operatorname{sh} x\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, dv = \operatorname{sh} x\, dx, \\ du = dx, v = \operatorname{ch} x \end{bmatrix} = \operatorname{sh} 1 - 2\left(x \operatorname{ch} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \operatorname{ch} x\, dx \right) =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - 2\operatorname{ch} 1 + +2\operatorname{sh} 1 = 3\operatorname{sh} 1 - 2\operatorname{ch} 1.$$

2 Найти координаты центра масс дуги окружности

$$x = a\cos t, \ y = a\sin t, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Масса дуги окружности в первой четверти есть

$$M = \frac{\pi a}{2}.$$

Имеем

$$x' = -a\sin t, \ y' = a\cos t,$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = a.$$

Тогда

$$M_x = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = a^2 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2,$$

$$M_y = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt = -a^2 \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2.$$

Следовательно,

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{a^2}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{2a}{\pi}, \qquad y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{a^2}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{2a}{\pi}.$$

3 Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 2t + 3t^2$ м/с. Требуется найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

Решение. Так как путь, пройденный телом со скоростью $v(t)$ за отрезок времени выражается интегралом $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$, то имеем

$$S = \int_0^5 \left(2t + 3t^2\right)dt = \left(t^2 + t^3\right)\Big|_0^5 = 150 \ \text{(м)}.$$

4 Какую работу необходимо затратить, для того, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h? Чему равна работа, если тело удаляется в бесконечность?

Решение. Работа переменной силы $f(x)$, действующей вдоль оси Ox на отрезке $[a;b]$, выражается интегралом

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Согласно закону всемирного тяготения сила F, действующая на тело массы m, равна

$$F = k\frac{mM}{r^2},$$

где M – масса земли, r – расстояние массы m от центра земли, k – гравитационная постоянная. Так как на поверхности Земли, т.е. при $r = R$, имеем $F = mg$, то можно записать

$$mg = k\frac{mM}{R^2}.$$

Отсюда получаем $kM = gR^2$. Тогда $F = mg\frac{R^2}{r^2}$.

Следовательно, искомая работа равна:

$$A = \int_R^{R+h} F\,dr = \int_R^{R+h} mgR^2\frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^{R+h} = mgR\frac{h}{R+h}.$$

Отсюда при $h \to \infty$ имеем

$$\lim_{h\to\infty} A = mgR.$$

5 Вычислить кинетическую энергию однородного кругового конуса, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси, если заданы радиус основания конуса R, высота H и плотность γ.

Решение. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω, равна $\frac{1}{2}I\omega^2$, где I момент инерции тела относительно оси вращения. Пусть dm – элементарная масса полого цилиндра высоты h с внутренним радиусом r и толщиной стенок dr (рисунок 8. 3)

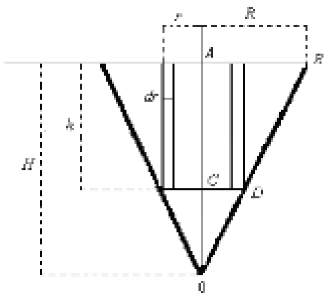

Рисунок 8. 3 – Геометрическая интерпретация примера 5

Тогда

$$dm = 2\pi\, rh\gamma\, dr\ ,\ 0 \le r \le R\,.$$

Из подобия треугольников OCD и OAB имеем

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}\,.$$

Отсюда

$$h = H\left(1-\frac{r}{R}\right).$$

Следовательно,

$$dm = 2\pi\,\gamma\, H\left(1-\frac{r}{R}\right) r\, dr\ ,$$

и элементарный момент инерции dI равен

$$dI = dm\, r^2 = 2\pi\,\gamma\, H\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\, dr\ .$$

Таким образом, момент инерции всего конуса есть

$$I = \int_0^R dI = \int_0^R 2\pi\,\gamma\, H\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\, dr = 2\pi\,\gamma\, H\left(\frac{R^4}{4}-\frac{R^4}{5}\right) = \frac{1}{10}\pi\,\gamma\, H\, R^4\,,$$

и кинетическая энергия конуса равна

$$K = \frac{1}{20}\pi\,\gamma\, H\, R^4\, \omega^4\,.$$

6 Найти силу давления воды на вертикальную треугольную пластину с основанием a и высотой h, погруженную в воду вершиной вниз так, что основание находится на поверхности воды.

Решение. Согласно закону Паскаля сила давления P жидкости с удельным весом γ на площадку S при глубине погружения H равна

$$P = \gamma\, H\, S\ .$$

Введем систему координат (рисунок 8. 4) Oxy и рассмотрим элементарную прямоугольную площадку, находящуюся на глубине x и имеющую основание b и высоту dx.

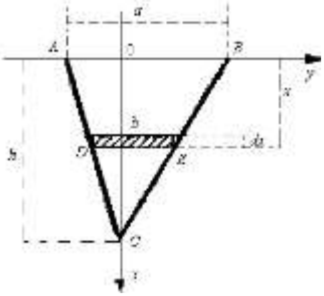

Рисунок 8. 4 – Геометрическая интерпретация примера 6

Из подобия треугольников CAB и CDE имеем

$$\frac{b}{a} = \frac{h - x}{h}.$$

Отсюда $b = \frac{a}{h}(h - x)$.

Следовательно, (для воды $\gamma = 1$).

$$dS = b\,dx = \frac{a}{h}(h - x)dx,$$

$$dP = x\,dS = \frac{ax}{h}(h - x)dx$$

Таким образом, сила давления воды на всю пластину равна

$$P = \int_0^h x\,dS = \frac{a}{h}\int_0^h x(h - x)dx = \frac{a}{h}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{ah^2}{6}.$$

7 Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если известно, что для удаления ее на 1см необходимо приложить силу в 1 кН.

Решение. Согласно закону Гука, сила F, растягивающая пружину пропорциональна ее растяжению

$$F = k\,x,$$

где k – коэффициент пропорциональности, x – растяжение пружины (в метрах).

Так как по условию при $x = 0{,}01$ м сила $F = 1$ кН, то из равенства

$$1 = 0{,}01k,$$

получаем

$$k = 100\ ,\ F = 100\,x\,.$$

Следовательно, искомая работа равна

$$A = \int_0^{0,1} 100\,x\,dx = 50\,x^2\Big|_0^{0,1} = 0,5\ \text{кДж.}$$

Тема 9 Несобственные интегралы

1 Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$;

б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos x\,dx$;

в) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^6}$;

г) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin 2x\,dx$;

д) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$;

е) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+4}$;

ж) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$;

и) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

2 Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{5x^4+2x^2+3}$;

б) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\,dx$;

в) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}\,dx$;

г) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^{11}}}$.

3 Вычислить площадь бесконечной трапеции, ограниченной указанными линиями:

а) $y = x\,e^{-x}$, ($x \ge 0$), $y = 0$;

б) $y = \dfrac{1}{x^2+9}$, $y = 0$.

4 Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$; в) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

б) $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; г) $\int\limits_{-8}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

5 Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$; д) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$;

б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$; е) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 xdx}{\cos x}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} \ln x\, dx$; ж) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

г) $\int\limits_{0}^{0,4} \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$; и) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos^3(\ln x)}{x\ln x} dx$.

6 Вычислить интеграл в смысле главного значения:

а) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin xdx$; б) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} xdx$; в) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{13+x}{17+x^2} dx$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить интегралы

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$; в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^p}$.

Решение. а) имеем:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2};$$

б) при $p=1$ имеем:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln b-\ln 1\right)=+\infty .$$

При $p\neq 1$ получим:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-p}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^b=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}, \text{ если } p>1,\\ +\infty, \text{ если } p<1.\end{cases}$$

Значит, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\leq 1$;

в) при $p=1$ имеем:

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln 1-\ln\varepsilon\right)=+\infty .$$

При $p\neq 1$ имеем:

$$\int_0^1\frac{dx}{x^p}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{-p}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_\varepsilon^1=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}, \text{ если } p<1,\\ +\infty, \text{ если } p>1.\end{cases}$$

Значит, интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p<1$ и расходится при $p\geq 1$.

2 Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx$, $n=0,1,2,\ldots$.

Решение. Проинтегрируем по частям:

$$I_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx=\begin{bmatrix}u=x^n; dv=e^{-x};\\ du=nx^{n-1}; v=-e^{-x}\end{bmatrix}=-x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx,$$

т. е. $I_n=n\cdot I_{n-1}$.

Поскольку

$$I_0=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1,$$

то, применяя последовательно рекуррентную формулу, получим

$$I_n=nI_{n-1}=n\left(n-1\right)I_{n-2}=\ldots=n!I_0=n!.$$

3 Исследовать на сходимость интегралы

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Решение. а) сравним интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ с расходящимся интегралом $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-1}$. Поскольку

$$\ln x = \ln\left(1+(x-1)\right) \sim x-1$$

при $x \to 1$, то

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(1+(x-1)\right)}{x-1} = 1;$$

Значит, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ расходится;

б) сравним данный интеграл со сходящимся интегралом $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\ \forall x \in [1;+\infty)$$

то из сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ согласно признаку сравнения следует, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ сходится.

4 Исследовать на сходимость интегралы

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$, б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x| dx}{x}$.

Решение. а) имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x} = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{d(\cos x)}{x} = -\frac{\cos x}{x}\Bigg|_1^{\infty} + \int\limits_1^{+\infty} \cos x d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$=\cos 1-\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx .$$

Поскольку $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$ и интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, то интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ абсолютно сходится. Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x}$ сходится;

б) из неравенства

$$|\sin x|\ge\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

следует, что для любого $\eta>1$ выполняется неравенство

$$\int_1^{\eta}\frac{|\sin x|dx}{x}\ge\frac{1}{2}\int_1^{\eta}\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_1^{\eta}\frac{\cos 2xdx}{x} .$$

Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится.

Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2xdx}{x}$ сходится, поскольку

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2xdx}{x}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{d(\sin 2x)}{x}=\frac{1}{2}\left.\frac{\sin 2x}{x}\right|_1^{\infty}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\sin 2+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx$$

и интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx$ сходится ($\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$ и интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится).

Значит, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|dx}{x}$ расходится.

5 Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$.

Решение. Функция $f(x) = \sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а функция $g(x) = \frac{1}{x^p}$, $p > 0$, убывает при $x \to +\infty$, т. е. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$. Согласно признаку Дирихле интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$ сходится.

6 Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x dx}{x^p}$.

Решение. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$ сходится, а функция $g(x) = \operatorname{arctg} x$ ограничена и монотонна. В силу признака Абеля интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x dx}{x^p}$$

сходится.

Раздел 5 Теория рядов

Тема 1 Ряды с неотрицательными членами

1 Записать первые шесть членов ряда по заданному общему члену:

а) $a_k = \frac{k}{3^k (2k+1)}$;

б) $a_k = \frac{k!}{2^k (2k-1)!!}$;

в) $a_k = \frac{3k+4}{4k-1}$;

г) $a_k = \frac{(2k+1)!!}{(k+1)2^k}$.

2 Записать формулу общего члена для рядов:

а) $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots$;

в) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$;

б) $\frac{10}{7}+\frac{100}{9}+\frac{1000}{11}+\frac{10000}{13}+\ldots$; г) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$.

3 Найти суммы рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$; в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{5^{k-1}}$.

4 Используя необходимое условие, исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{3k+2}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{5k-2}{5k+3}$.

5 С помощью интегрального признака исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}$; г) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2 k}$;

б) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+9}$;

в) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\ln^3 k}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2e^{-k^3}$.

6 С помощью признаков сравнения исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k+9}$; д) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln k}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+6}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k-1}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{5^{2k}+7}$; ж) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$;

г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{\sqrt{k^4+9}}$; и) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^3-3k^2+5}{2k^5+9k}$.

7 С помощью признака Д’аламбера исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k5^{2k-1}}$; в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{k2^{k+1}}$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k}{3^k(2k-1)}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^4}$.

8 С помощью признака Коши исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k-1}{4k+5}\right)^k$; г) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5k+2}{3k+4}\right)^k$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2k^2+5k+2}{3k^2+k+3}\right)^k$; д) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k^2+6k+8}{2k^2-k+6}\right)^k$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{k}{k+4}\right)^{k^2}$; е) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k}{k+5}\right)^k \left(\frac{k+2}{k+3}\right)^{k^2}$.

Примеры оформления решения

1 Записать первые пять членов ряда, общий член которого задан формулой $a_k = \frac{k}{2^{k-1}(3k+1)}$.

Решение. Полагая в формуле общего члена $k=1$, 2, 3, 4, 5, получим

$$a_1 = \frac{1}{2^{1-1}(3\cdot 1+1)} = \frac{1}{4},$$

$$a_2 = \frac{2}{2^{2-1}(3\cdot 2+1)} = \frac{2}{14},$$

$$a_3 = \frac{3}{2^{3-1}(3\cdot 3+1)} = \frac{3}{40},$$

$$a_4 = \frac{4}{2^{4-1}(3\cdot 4+1)} = \frac{4}{104},$$

$$a_5 = \frac{5}{2^{5-1}(3\cdot 5+1)} = \frac{5}{256}.$$

Ряд можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}(3k+1)} = \frac{1}{4} + \frac{2}{14} + \frac{3}{40} + \frac{4}{104} + \frac{5}{256} + \ldots .$$

2 Найти общий член ряда

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{11}\right)^3+\left(\frac{5}{15}\right)^4+\ldots .$$

Р е ш е н и е . Показатель степени каждого члена совпадает с номером этого члена, поэтому показатель степени k -го члена равен k .

Числители дробей $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{5}{15}$, $\ldots$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью 1. Поэтому k -й числитель равен $k+1$. Знаменатели образуют арифметическую прогрессию с первым членом 3 и разностью 4. Поэтому k -й знаменатель равен $4k-1$. Следовательно, общий член ряда имеет вид $a_k=\left(\frac{k+1}{4k-1}\right)^k$.

3 Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

Р е ш е н и е . Поскольку

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right),$$

то

$$a_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),\ a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),$$

$$a_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right),\ a_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)\ \text{и т. д.}$$

Следовательно,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}.$$

Значит, ряд сходится и сумма ряда равна $\frac{1}{2}$.

4 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$, $a \neq 0$.

Решение. а) для ряда

$$a - a + a - a + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a$$

составим частичные суммы:

$$S_1 = a\,,\ S_2 = 0\,,\ \ldots,\ S_{2n-1} = a\,,\ S_{2n} = 0\,,\ \ldots.$$

Последовательность частичных сумм (S_n) этого ряда не имеет предела и поэтому данный ряд расходится;

б) сумма n первых членов ряда

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{k-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$$

имеет вид

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q},\ q \neq 1\,.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ если } |q| < 1, \\ \infty, \text{ если } |q| > 1, \end{cases}$$

то

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, \text{ если } |q| < 1, \\ \infty, \quad \text{ если } |q| > 1. \end{cases}$$

При $q = -1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$ совпадает с рядом $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a$, при $q = 1$, $S_n = na$ и $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$ сходится при $|q|<1$ и его сумма $S=\dfrac{a}{1-q}$, при $|q|\geq 1$ он расходится.

5 Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k$

Решение. Вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty} a_k=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e\neq 0 .$$

Согласно теореме 1 не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Значит, данный ряд расходится.

6 Исследовать сходимость *гармонического ряда*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} .$$

Решение. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{k}=0$, однако гармонический ряд расходится. Докажем, что гармонический ряд расходится двумя способами.

<u>1 способ</u>. Действительно, предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ сходится и его сумма равна S. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=\lim_{n\to\infty} S_{2n}-\lim_{n\to\infty} S_n=S-S=0 .$$

Из неравенства

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},\ n\in\mathbb{N} ,$$

предельным переходом по n получаем противоречие: $0\geq\dfrac{1}{2}$.

<u>2 способ</u>. Имеем:

$$\left|a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+p}\right|=\left|\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k+p}\right|=$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{k+p}.$$

Для любого $t \in \mathbb{N}$ положим $k = t$ и $p = t$. Так как $\frac{1}{t+i} \geq \frac{1}{t+t}$, $i = 1, 2, \ldots, t$,то получим:

$$\left| a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+p} \right| > \frac{1}{2t} + \frac{1}{2t} + \ldots + \frac{1}{2t} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для любого $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ критерий Коши не выполняется. Следовательно, гармонический ряд расходится.

7 Исследовать сходимость *обобщенного гармонического ряда* (*ряда Дирихле*)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}, \ p \in \mathbb{R}.$$

Решение. При $p = 1$ ряд совпадает с гармоническим рядом и расходится.

Если $p \leq 0$, то $\frac{1}{k^p} \geq 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{k^p} \neq 0$. В этом случае ряд расходится, так как нарушается необходимое условие сходимости ряда.

Пусть $p > 0$ и $p \neq 1$. Положим $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[1; +\infty)$.

Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится и расходится одновременно с интегралом $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Известно, что несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, \text{ если } p > 1, \\ \infty, \text{ если } 0 < p < 1. \end{cases}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

8 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}$; в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$; д) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{k+1}\right)^k$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{k}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^4}$; е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k^2+5k+1}{k^4-10k^2-5}$.

Решение. а) так как $\frac{1}{k^k} \le \frac{1}{k^2}$ $\forall k \ge 2$ и обобщенный гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится ($p = 2 > 1$), то согласно признаку сравнения сходится и данный ряд;

б) сравним ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{k}$ с гармоническим рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Поскольку

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} = \pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}} = \pi\,,\ 0 < \pi < \infty\,,$$

и гармонический ряд расходится, то расходится и исходный ряд;

в) вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!k^k}{(k+1)^{k+1}k!} = \lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{(k+1)^n} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e}\,.$$

Так как $L = \frac{1}{e} < 1$, то по признаку Д’аламбера данный ряд сходится;

г) вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}k^4}{(k+1)^4\cdot 2^k} = 2\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^4} = 2\,.$$

Так как $L = 2 > 1$, то согласно признаку Д’аламбера исходный ряд расходится;

д) так как

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{2k}{k+1}\right)^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k}{k+1}=2>1,$$

то согласно признаку Коши данный ряд расходится;

е) сравним ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k^2+5k+1}{k^4-10k^2-5}$ с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{3k^2+5k+1}{k^4-10k^2-5}}{\frac{1}{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(3k^2+5k+1\right)k^2}{k^4-10k^2-5}=3,\ 0<3<\infty.$$

Поскольку для ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ имеем $p=2$, то исходный ряд сходится вместе с обобщенным гармоническим рядом.

Тема 2 Знакопеременные ряды

1 Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{3^k}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-5)^k}{1+(-5)^{2k}}$;

в) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\ln k}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)(k-2)}{2}}}{k^2}$;

д) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{3k-1}$;

е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\alpha}{k^4}$.

2 Исследовать абсолютно или условно сходятся ряды:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k\ln k)^2}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k+2^k}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{3k(3k-1)}$;

д) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(3^k+1\right)}{k\cdot 3^k}$;

е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!!}{(k+1)^k}$.

3 С точностью до 0,001 вычислить сумму рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\,2^k}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt[3]{k+1}}$.

4 Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^k}+\frac{(-1)^k}{5^k}\right)$.

5 Составить ряд, полученный из разности соответствующих членов рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}$. Сходится ли полученный ряд?

6 Даны два ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}$. Записать первые пять членов их произведения. Сходится ли полученный ряд?

Примеры оформления решения

1 Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Решение. Так как $\frac{1}{k^2}>\frac{1}{(k+1)^2}$ $\forall k\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}=0$, то данный ряд, согласно признаку Лейбница, сходится.

2 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Решение. а) ряд, составленный из абсолютных величин исходного ряда, имеет вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ и является сходящимся. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}$ является абсолютно сходящимся;

б) по признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ сходится. С другой стороны, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ является расходящимся гармоническим рядом. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ не является абсолютно сходящимся.

3 Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$.

Решение. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ является расходящимся, так как $\lim_{k \to \infty} (-1)^k$ не существует.

Ряды

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$$

и

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots,$$

полученные из него путем объединения его членов, сходятся:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0,$$

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots=1.$$

Таким образом, для исходного ряда сумма ряда не существует, а ряды, полученные из него указанным объединением его членов, имеют конечные суммы.

4 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k}$.

Решение. Последовательность $(a_k) = \left(\frac{1}{k}\right)$ монотонно убывающая и $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$.

Рассмотрим последовательность $(B_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha\right)$. При $\alpha \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \ldots + 2\sin n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{3\alpha}{2} - \ldots + \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha\right| \le = \frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

При $\alpha \ne 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, все рассматриваемые суммы ограничены. В силу признака Дирихле ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k}$ сходится.

При $\alpha = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, все члены ряда обращаются в нуль и ряд также сходится.

5 Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k}\cos\frac{\pi}{k}$.

Решение. Последовательность $(a_k) = \left(\cos\frac{\pi}{k}\right)$ ограничена и монотонна. Ряд сходится по признаку Дирихле. Согласно признаку Абеля ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k}\cos\frac{\pi}{k}$ сходится.

6 Сколько членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^4}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,0001?

Решение. Этот ряд является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим условиям признака Лейбница:

$$1 > \frac{1}{2^4} > \frac{1}{3^4} > \ldots > \frac{1}{k^4} > \ldots ,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^4} = 0 .$$

Следовательно, данный ряд сходится, причем абсолютно, поскольку ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^4} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

является сходящимся обобщенным гармоническим рядом ($p = 4 > 1$).

Определим число членов, которые нужно взять, чтобы вычислить его сумму с заданной точностью.

Если

$$\frac{1}{k^4} < 0{,}0001 \text{ или } \frac{1}{k^4} < \frac{1}{10000} ,$$

то $k > 10$.

Следовательно, нужно взять 10 членов данного ряда.

Так как $a_{11} = \dfrac{1}{11^4} < \dfrac{1}{10^4} = 0{,}0001$, то оценка ряда есть

$$R_{10} < a_{11} < 0{,}0001 .$$

7 Составить сумму рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{3^k}$. Сходится ли полученный ряд?

Решение. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$ есть геометрический со знаменателем $q_1 = \dfrac{1}{2}$, его сумма $S_1 = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$, второй

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}$ геометрический ряд со знаменателем $q_2=-\frac{1}{3}$, его сумма $S_2=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$.

По определению суммы двух рядов полученный ряд имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right).$$

Данный ряд сходится, его сумма

$$S=S_1+S_2=2{,}75 .$$

Тема 3 Функциональные ряды

1 Доказать, что последовательность $\left(\frac{k^2}{k^2+x^2}\right)$ равномерно сходится на отрезке $[-1;1]$.

2 Найти область сходимости функциональных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{2x-3}{4x+5}\right)^k$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)x^{2k-1}}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}k\,e^{kx}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^k$;

д) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k$;

е) $\sum_{k=1}^{\infty}4^k(3x+2)^{2k-1}$;

ж) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5-x^2}{4}\right)^k$;

и) $\sum_{k=1}^{\infty}k^2e^{-kx^2}$.

3 Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+k}$.

4 Исследовать равномерную сходимость функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+3^k}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{x^2+k^2}$.

5 Исследовать непрерывность функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{x^2+k^2}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+x^2}$.

6 Найти сумму функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$.

Примеры оформления решения

1 Доказать, что функциональная последовательность $\left(x^n\right)_{n=1}^{\infty}=\left(1;x;x^2;...\right)$, заданная на множестве $X=\left[0;\frac{1}{2}\right]$, является равномерно сходящейся на этом множестве.

Решение. Предел существует и $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0=f(x)$ для всех $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Так как $\sup\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]}\left|x^n-0\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\left[0;\frac{1}{2}\right]}\left|x^n-0\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0.$$

Поэтому последовательность $\left(x^n\right)=\left(1;x;x^2;...\right)$ сходится равномерно к нулю на отрезке $X=\left[0;\frac{1}{2}\right]$: $x^n \underset{\left[0;\frac{1}{2}\right]}{\rightrightarrows} 0$.

2 Найти область абсолютной сходимости функционального ряда $1+x+x^2+...+x^{n-1}+...=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^{k-1}$.

Решение. Зафиксируем точку x и применим признак Д’аламбера:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^k}{x^{k-1}}\right|=|x|.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|x|^{k-1}$ сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|\ge 1$.

Таким образом, областью абсолютной сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}$ является интервал $(-1;1)$.

3 Найти область сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^k$.

Решение. Применим признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов данного ряда.
Так как

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|u_k(x)|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^k\right|}=\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^{\frac{1}{2k}}}=\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|,$$

то ряд сходится, когда $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<1$.

Решая данное неравенство, получим

$$-1<\frac{x-1}{2x+1}<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+1\ge 0,\\ -(2x+1)<x-1<2x+1,\end{cases}\\ \begin{cases}2x+1<0,\\ -(2x+1)>x-1>2x+1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge \frac{-1}{2},\\ x>0,\\ x>-2,\end{cases}\\ \begin{cases}x<-\frac{1}{2},\\ x<0,\\ x<-2,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>0,\\ x<-2.\end{array}\right.$$

Итак, ряд сходится при $x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$.
Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x=0$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, являющийся сходящимся, поскольку он удовлетворяет условиям Лейбница.

При $x=-2$ получим ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$, являющийся расходящимся как обобщенный гармонический ряд ($p=\frac{1}{2}<1$).

4 Исследовать ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$$

на а) поточечную, б) равномерную сходимость.

Решение. а) так как

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}+\ldots+\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}},$$

то члены исходного ряда при $x\neq 0$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{1+x^2}<1$, а при $x=0$ все обращаются в нуль. Тогда

$$S(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x=0, \\ 1+x^2, \text{ если } x\neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, областью поточечной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$ является вся числовая ось $\mathbb{R}$. При этом, хотя все члены ряда непрерывны на $\mathbb{R}$, сумма $S(x)$ разрывна в точке $x=0$;

б) пусть $0<\varepsilon<1$ и $x\neq 0$. Тогда

$$S_n(x)=\left(1+x^2\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\right),$$

и неравенство

$$\left|S(x)-S_n(x)\right|=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}<\varepsilon$$

выполняется при $n>N\left(\varepsilon,x\right)=1+\left[1-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\left(1+x^2\right)}\right]$.

Действительно,

$\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}<\varepsilon \;\Rightarrow\; \left(1+x^2\right)^{n-1}>\dfrac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; (n-1)\ln\left(1+x^2\right)>-\ln\varepsilon$.

Отсюда $n>1-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\left(1+x^2\right)}$.

Отсюда $N(\varepsilon,x)=1+\left[1-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\left(1+x^2\right)}\right]$.

Поскольку $N(\varepsilon,x)\to+\infty$ при $x\to 0$ и $0<\varepsilon<1$, то при выбранном ε не существует конечного номера $N(\varepsilon)$, который не зависит от x, такого, чтобы выполнялось неравенство $\left|S(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon \;\; \forall n>N(\varepsilon),\; \forall x\in\mathbb{R}$.

Значит, сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$ на $\mathbb{R}$ неравномерная.

5 Является ли сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos kx}{k^3}$ непрерывной функцией?

Решение. Каждый член $u_k(x)=\dfrac{\cos kx}{k^3}$, $k=1,2,\ldots$, есть функция, непрерывная от x. Поскольку $\left|\dfrac{\cos kx}{k^3}\right|\le\dfrac{1}{k^3}$, то и мажорантный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^3}$ является сходящимся как обобщенный гармонический ряд, $p=3>1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos kx}{k^3}$ сходится равномерно на всей числовой оси. Поэтому сумма этого ряда непрерывна при всех x как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.

6 Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+x^2}$.

Так как $\frac{1}{k^2+x^2}\le\frac{1}{k^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Интегрируя его почленно на отрезке $[0;x]$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x\frac{1}{k^2+t^2}\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}.$$

Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

7 Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$.

Решение. Очевидно, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$ сходится при $|x|<1$ и его сумма равна $\frac{1}{1-x}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$, полученный почленным дифференцированием ряда сходится равномерно при $|x|\le q<1$ на основании признака Вейерштрасса, так как он мажорируется числовым рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}$, сходящимся по признаку Д'аламбера. Используя свойство почленного дифференцирования, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2},\ \forall x\in(-1;1).$$

Тема 4 Степенные ряды

1 Найти радиус сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{7^k}$; д) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k5^kx^k$;

б) $\sum_{k=0}^{\infty} k3^k x^k$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k^2}}{k!}(x+3)^k$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty} (1-\frac{1}{k})^{k^2}(x-e)^k$;

е) $\sum_{k=1}^{\infty} k!(x-2)^k$;

ж) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}(x+1)^k$;

и) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k$.

2 Найти область сходимости степенных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2k-1}}{k^3}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2k-1}}{k \cdot 7^k}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k(5^k+1)}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k\sqrt{k+1}}$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$.

Р е ш е н и е . Имеем:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = 0 .$$

Значит, ряд сходится в единственной точке $x = 0$.

2 Найти область сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k \cdot 5^k}$.

Р е ш е н и е . Имеем:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{1}{k \cdot 5^k}}{\dfrac{1}{(k+1)\cdot 5^{k+1}}} = 5 \cdot$$

Значит, интервал сходимости $-5 < x-3 < 5$ или $-2 < x < 8$. В точке $x = -2$ получаем условно сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, а в точке $x = 8$ – расходящийся гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Таким образом, область сходимости ряда есть полуинтервал $[-2;8)$.

3 Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Решение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^k x^{2k} + \ldots,$$

полученный почленным дифференцированием исходного ряда. Так как члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\left(-x^2\right)$, то его сумма $S(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, если $|x| < 1$.

Интегрируя ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$ почленно на отрезке $[0; x] \subset (-1;1)$, получаем:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \operatorname{arctg} x, \quad |x| < 1.$$

Таким образом, функция $y = \operatorname{arctg} x$ является суммой исходного ряда.

Тема 5 Ряд Тейлора

1 Разложить в ряд Маклорена функции:

а) $f(x) = 4^x$;

б) $f(x) = \sqrt{1-x}$;

в) $f(x) = \ln(2+x)$;

г) $f(x) = \operatorname{sh}^2 x$;

д) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

е) $f(x) = (1+x)e^{-x^2}$.

2 Вычислить с точностью 0,0001 значение функций:

а) $\sqrt{24}$;

б) $\cos 18^\circ$;

в) $\operatorname{arctg} 0{,}9$;

г) $\ln 3$;

д) $\sqrt[3]{e}$;

е) $\sqrt[4]{17}$.

3 Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x}$.

4 С точность до 0,0001 вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\sin x}{x}dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+x^4}\,dx$;

б) $\int\limits_0^{1}\cos^3 x dx$; г) $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{e^x-1}{x}dx$.

5 Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанным условиям:

а) $y'x+y+2=0$, $y(1)=2$;

б) $y'(x-3)+y=0$, $y(-6)=-6$;

в) $y'-y=e^x$, $y(0)=1$;

г) $y''=2x-\operatorname{sh}x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Разложить функцию $f(x)=2^x$ в степенной ряд.

Р е ш е н и е . Найдем значение функции и ее производных в точке $x=0$:

$$f(x)=2^x, \qquad f(0)=1,$$
$$f'(x)=2^x\ln 2, \qquad f'(0)=\ln 2,$$
$$f''(x)=2^x\ln^2 2, \qquad f''(0)=\ln^2 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f^{(n)}(x)=2^x\ln^n 2, \qquad f^{(n)}(0)=\ln^n 2.$$

Так как $0<\ln 2<1$, то при фиксированном x имеет место неравенство

$$\left|f^{(n)}(x)\right|<2^x$$

при любом n. Следовательно, функция может быть представлена в виде суммы ряда Тейлора

$$2^x = 1 + x\cdot \ln 2 + \frac{x^2\cdot \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3\cdot \ln^3 2}{3!} + \ldots .$$

2 Разложить функцию $f(x)=\sin^2 x$ в степенной ряд.

Решение. Функцию $f(x)=\sin^2 x$ можно записать в виде

$$f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x).$$

Заменим $\cos 2x$ его разложением в ряд Маклорена

$$\cos 2x = 1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots=$$

$$=1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots .$$

Подставляя, получим

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)\right)=$$

$$=\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots .$$

3 Разложить функцию $f(x)=e^{-x^2}$ в степенной ряд.

Решение. В разложении

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

заменим x на $\left(-x^2\right)$. Получим

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

4 Разложить функцию $f(x)=\ln x$ в степенной ряд по степеням $(x-1)$.

Решение. В разложении $\forall x\in(-1;1)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

заменим x на $(x-1)$. Получим $\forall x\in(0;2)$

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots .$$

5 Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в степенной ряд по степеням $(x-2)$.

Решение. Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{x}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-2}{2}} .$$

Правую часть можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей прогрессии с первым членом $a_1=\dfrac{1}{2}$ и и знаменателем $q=-\dfrac{x-2}{2}$.

Отсюда получаем

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\ldots ,$$

Тогда

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{x-2}{4}+\frac{(x-2)^2}{8}-\frac{(x-2)^3}{16}+\ldots .$$

Поскольку ряд сходится при $\left|\dfrac{x-2}{2}\right|<1$, то разложение имеет место для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<x<4$.

6 Разложить по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^3 функцию

$$f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2} .$$

Решение. Используем разложение $\forall x\in(-1;1)$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{a(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

для разложения функций

$$f_1(x)=(1+x^3-2x)^{\frac{1}{2}} \text{ и } f_2(x)=(1+x^2-3x)^{\frac{1}{3}} .$$

Для первой функции имеем

$$f_1(x)=\left(1+\left(x^3-2x\right)\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left(x^3-2x\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(x^3-2x\right)^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(x^3-2x\right)^3+o\left(\left(x^3-2x\right)^3\right)=$$

$$=1-x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right),$$

так как $o\left(x^3-2x\right)=o\left(x^3\right)$.

Для второй функции аналогично получим

$$f_2(x)=\left(1+\left(x^2-3x\right)\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\left(x^2-3x\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(x^2-3x\right)^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(x^2-3x\right)^3+o\left(x^3\right)=$$

$$=1-\frac{1}{3}x^2-x+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)=1-x-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right).$$

Тогда

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x)=$$

$$=1-x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right)-\left(1-x-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{6}x^2+x^3+o\left(x^3\right)$$

(воспользовались тем, что $o\left(x^3\right)-o\left(x^3\right)=o\left(x^3\right)$).

7 Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ число e.

Решение. Так как

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{k!}+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\xi<x,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

то из оценки

$$\left|R_n(1)\right|=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}\le 0{,}01$$

следует, что $n\ge 5$, т. е. $n_0=5$. Полагая $x_0=1$, $x_1=0$, получим

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!} \approx 2+0,500+0,167+0,042+0,008=2,717 .$$

8 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}$.

Решение. Заменим e^x и $\sin x$ их разложением в ряд Маклорена

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-2-2x-x^2}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}\ldots+}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}+\frac{2x}{4!}\ldots+}{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots}=2 .$$

9 Вычислить $\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2}dx$ с точностью $\varepsilon=0,001$.

Решение. Имеем $\forall x\in\mathbb{R}\quad e^{-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n!}$

Тогда

$$\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_0^{1/3}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} .$$

Отсюда

$$|r_n|\le\frac{1}{(n+1)!(2n+3)3^{2n+3}}\le 0,001 \;\Rightarrow\; n\ge 1\Rightarrow n_0=1$$

$$\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}\approx 0,3333-0,0123=0,3210 .$$

Окончательно получаем $\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2}dx\approx 0,321$ с точностью $\varepsilon=0,001$.

10 Найти решение уравнения $yy' = \sin y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Уравнение $yy' = \sin y$ допускает разделение переменных:

$$\frac{ydy}{\sin y} = dx .$$

Однако интеграл от левой части уравнения не выражается в элементарных функциях. В окрестности $x_0 = 0$ уравнение удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Будем искать его в виде ряда Маклорена

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Так как $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$ и $y' = \dfrac{\sin y}{y}$, то $y'(0) = \dfrac{2}{\pi}$. Дифференцируя по x обе части равенства $y' = \dfrac{\sin y}{y}$, находим

$$y'' = \frac{(y'\cos y)y - y'\sin y}{y^2} = \frac{y'(y\cos y - \sin y)}{y^2} .$$

Откуда $y''(0) = \dfrac{-y'(0)\sin(\pi/2)}{(\pi/2)^2} = -\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^3$. Дифференцируя обе части найденного равенства для y'', находим $y'''(0)$. Продолжая этот процесс, можно получить любое число членов разложения в ряд Маклорена искомого решения $y = y(x)$:

$$y = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}x - \frac{2^2}{\pi^3}x^2 + \ldots .$$

Задания к контрольным работам

Контрольная работа по разделу «Теория пределов»

Вариант 1

1 Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества $X = \{x \in Q : |x| \le 2\}$.

2 Найти все значения корня и изобразить их в комплексной плоскости числа $\sqrt[7]{3-3\sqrt{3}i}$.

3 Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

4 Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x\sin 5x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+1}\right)^{x-1}$.

5 Исследовать функцию на непрерывность

$$f(x)=\begin{cases}|x|-1 \text{ при } x\le -1,\\ x^2 \text{ при } x>-1.\end{cases}$$

Вариант 2

1 Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества $X=\{x\in Q:|x|\ge 3\}$.

2 Найти все значения корня и изобразить их в комплексной плоскости числа $\sqrt[3]{2-2i}$.

3 Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

4 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\sin 9x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{5x+1}\right)^{x-1}$.

5 Исследовать функцию на непрерывность

$$f(x)=\begin{cases}-2|x| \text{ при } x\le -1,\\ x^2+1 \text{ при } x\ge -1.\end{cases}$$

Контрольная работа по разделу «Дифференциальное исчисление функции действительной переменной»

Вариант 1

1 Найти производные данных функций:

а) $y=\arcsin x^2$, б) $y=(x-5)^2\cdot e^{x^2-3}$, в) $y=\dfrac{\sin(x+6)}{x^2+5}$.

2 Найти производную неявной функции и функции, заданной параметрическими уравнениями

а) $\sin\left(y^2\right)=x^2+y^3$; б) $x=\sqrt{t^3-1}$, $y=\operatorname{arctg}(t+1)$.

3 Найти производную функции с помощью логарифмической производной:

а) $y=(\operatorname{tg} x)^{\cos x+x}$, б) $y=\dfrac{(x-5)^2}{\sin^3 x}$.

4 Написать разложение функции $y=f(x)$ в ряд Маклорена по степеням переменной x до членов порядка n включительно $y=x^2\cdot e^{x+1}$, $n=4$.

5 Провести полное исследование и построить график функции:

а) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$; б) $x=t^3+2t^2+t$. $y=-2+3t-t^3$.

6 Частица движется с постоянной по величине скоростью v по кривой $y=x^3$. Найдите величину ускорения частицы в момент, когда $x=0$.

Вариант 2

1 Найти производные данных функций:

а) $y=\arcsin\left(\ln^2 x\right)$, б) $y=\cos x^2\cdot\ln(\operatorname{tg} x)$, в) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-4}}{\arccos x}$.

2 Найти производную неявной функции и функции, заданной параметрическими уравнениями

а) $\sqrt{y+1}=\ln(x-y)+y$, б) $x=\sqrt[3]{t^2-1}$, $y=\operatorname{arctg} t+t^2$.

3 Найти производную функции с помощью логарифмической производной:

а) $y=(\sin x)^{\cos x}$, б) $y=\dfrac{\left(x^5-x\right)^4}{\sqrt[5]{x+3}}$.

4 Написать разложение функции $y = f(x)$ в ряд Маклорена по степеням переменной x до членов порядка n включительно: $y = \sin(x+1)$, $n = 3$.

5 Провести полное исследование и построить график функции:

а) $y = \dfrac{4x^2 - 1}{3 + 2x + x^2}$; б) $x = \sin 2t$, $y = \sin 3t$.

6 На прямой между двумя источниками света силы F и $8F$ найти наименее освещенную точку, если расстояние между источниками равно 24 м (освещенность прямо пропорциональна силе света источника и обратно пропорциональна квадрату расстояния до него).

Контрольная работа по разделу «Интегральное исчисление функции действительной переменной»

Вариант 1

1 Найти неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{4\sqrt[3]{x} + x^2\sqrt{x} - 5}{\sqrt[4]{x}}dx$; б) $\displaystyle\int \frac{(3\sin x - 2\cos)dx}{1 + \cos x}$;

в) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x+5}dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5x-2)^3}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(2x+5)dx}{x^2 + 6x + 3}$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}}$;

ж) $\displaystyle\int (5x+2)\sin(x-3)dx$; и) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

к) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)^2}$; л) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+5}$;

м) $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{3x}}{1 - e^{2x} + e^{4x}}dx$; н) $\displaystyle\int x^2 f''((2x+1)^3)dx$.

2 Вычислить $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

3 Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x \, dx$; в) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10} dx$;

б) $\int\limits_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$; г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

4 Найти длину дуги кривой $y = \sin^4 t$, $y = \cos^2 t$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5 Найти координаты центра масс и моменты инерции фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

6 Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Вариант 2

1 Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{1+2\sqrt{x}-2x+\sqrt[3]{x^4}}{x^2} dx$; б) $\int \sin(7x-1) dx$;

в) $\int \sqrt[4]{5x-3} dx$; г) $\int \frac{dx}{(3x-1)^5}$;

д) $\int \frac{x\,dx}{x^2+4x+5}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+7}}$;

ж) $\int \sin(2x-7) e^{-4x+5} dx$; и) $\int \frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)} dx$;

к) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x-1}}$; л) $\int \frac{dx}{-4\cos x + 3\sin x}$;

м) $\int \sqrt{x} \operatorname{arcctg} \sqrt{x} \, dx$; н) $\int x^2 f'(x^3) dx$.

2 Вычислить $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} \, dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} \, dt}$.

3 Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x\,dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x+1)^3}$;

б) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$; г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$.

4 Найти длину дуги кривой $r=\sin^3\frac{\varphi}{3}$, $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5 Найти координаты центра масс и моменты инерции фигуры, ограниченной кривыми $y=x^3$, $x+y=1$, $x=0$.

6 Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

Контрольная работа по разделу «Теория рядов»

Вариант1

1 Исследовать сходимость рядов с неотрицательными членами:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{2^k(k-1)!}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{3k-4}\right)^{k-2}$, в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln(3k)}$.

2 Исследовать сходимость рядов. В случае сходимости ряда, вычислить его сумму с точностью α: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{3k^2+1}$, $\alpha=0{,}01$.

3 Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}3^{k^2}x^{k^2}$.

Вариант2

1 Исследовать сходимость рядов с неотрицательными членами:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(2k+1)!}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{4k-1}\right)^{2k+3}$, в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)\ln^2(k+2)}$.

2 Исследовать сходимость рядов. В случае сходимости ряда, вычислить его сумму с точностью α: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}$, $\alpha=0{,}01$.

3 Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{3k+8}$.

Тестовые задания

Вариант1

Часть А		
	Задание	*Варианты ответов*
1	Вычислить модуль и аргумент комплексного числа $z=5+5i$	а) $\lvert z\rvert=5\sqrt{2}$, $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$; б) $\lvert z\rvert=5$, $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$; в) $\lvert z\rvert=5\sqrt{2}$, $\arg z=\dfrac{3\pi}{4}$; г) $\lvert z\rvert=5\sqrt{2}$, $\arg z=-\dfrac{\pi}{4}$
2	Найти $\inf A$. $\sup A$ для множества $A=\left\{\,x \mid\; x^2<2,\ x\in\mathbb{R}\,\right\}$	а) $\sup A=2$, $\inf A=-2$; б) $\sup A=\sqrt{2}$, $\inf A=-\sqrt{2}$; в) $\sup A=\sqrt{2}$, $\inf A=0$; г) другой ответ.
3	Вычислить предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}$	а) ∞; б) $\dfrac{1}{2}$; в) 1; г) 0.
4	Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}4x}{\sin x}$	а) 4; б) $\dfrac{1}{4}$; в) ∞; г) 1.
5	Вычислить $f'(-3)$ функции $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$	а) 0; б) 1; в) -2; г) 2.
6	Вычислить $y'(0)$ функции $y^2+x^2-6xy-10=0$.	а) 0; б) 3; в) 1; г) 2.
7	Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$	а) $\dfrac{1}{\ln x}+C$; б) $-\dfrac{1}{\ln x}$; в) $-\dfrac{1}{\ln x}+C$; г). $-\dfrac{1}{\ln^3 x}+C$
8	Интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x\cos x\,dx$	а) абсолютно сходится; б) сходится в смысле главного значения;

9	Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$	а) $(0;1)$; б) $(-1;1)$; в) $[-1;1)$; г) $[-1;0)$.
10	Найти $3S$, где S – площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-6x+8$, $y=0$	а) -4; б) 4; в) 12; г) 8.
Часть В		
1	Решить уравнение $z^2=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$.	
2	Является ли при $x\to\infty$ функция $f(x)=\frac{\operatorname{sign}(\cos x)}{x-\pi/2}$ бесконечно малой?	
3	Является ли непрерывной функция $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{2x}} & \text{при } x\neq 0,\\ \sqrt{e} & \text{при } x\neq 0?\end{cases}$	
4	Найти $\max y(x)$ и $\min y(x)$ функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $x(t)=\frac{1}{t(t+1)}$, $y(t)=\frac{(t+1)^2}{t}$ при $t>0$	
5	Является ли сходящимся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k+k!}{(k+1)!}$?	
6	Найти 3-ий коэффициент в разложении функции в ряд Маклорена функции $f(x)=x^2\cos 2x$.	
7	Найти длину кривой $x=3\cos t$, $y=3\sin t$.	
8	Укажите верные утверждения: а) если функция $f(x)+g(x)$ имеет в точке x_0 предел. То функции $f(x)$ и $g(x)$ также имеют предел в точке x_0; б) если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке x_0 равен $f'(x_0)$; в) любая ограниченная на $[a;b]$ функция, интегрируема на этом отрезке;	

9	Укажите не верное утверждение: а) $d^2y = y''(x)dx$; б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x:\ 0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x)\rvert > \varepsilon$; в) $\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$; г) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\alpha$ сходится, если последовательность (a_k) монотонно убывает.

Вариант 2

Часть А		
	Задание	*Варианты ответов*
1	Вычислить модуль и аргумент комплексного числа $z = \sqrt{3} - i$	а) $\lvert z\rvert = \sqrt{2}$, $\arg z = -\frac{\pi}{6}$; б) $\lvert z\rvert = 2$, $\arg z = -\frac{\pi}{6}$; в) $\lvert z\rvert = 2$, $\arg z = \frac{7\pi}{6}$; г) $\lvert z\rvert = -2$, $\arg z = -\frac{\pi}{6}$.
2	Найти $\inf A$. $\sup A$ для множества $A = \left\{ x \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$	а) $\sup A = \infty$, $\inf A = -\infty$; б) $\sup A = 1$, $\inf A = -1$; в) $\sup A = 1$, $\inf A = 0$; г) другой ответ.
3	Вычислить предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 10}}{2n + 5}$	а) ∞; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 0.
4	Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sin 3x}$	а) 3; б) $\frac{1}{3}$; в) ∞; г) 1.
5	Вычислить $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ функции $f(x) = \sin x \sin 2x \sin 4x$	а) 0; б) 1; в) -1; г) 2.

6	Вычислить $y'(0)$ функции $x^2-4xy+4y+4x-16=0$.	а) 0; б) 3; в) 15; г) 1.
7	Вычислить интеграл $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$	а) $\frac{1}{\cos x}+C$; б) $-\frac{1}{\cos x}+C$; в) $-\frac{3}{\cos x}+C$; г) $\frac{3}{\cos x}+C$.
8	Интеграл $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{-x}}$	а) абсолютно сходится; б) сходится условно; в) равен 1; г) сходится.
9	Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}$	а) $(0;1)$; б) $[-1;1]$; в) $[-1;1)$; г) $[-1;0)$.
10	Найти $3S$, где S – площадь фигуры, ограниченной линиями $x=4-x^2$, $x=0$	а) -32; б) 16; в) 8; г) 32.

Часть В

1	Решить уравнение $z^2=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
2	Является ли при $x\to\infty$ функция $f(x)=\frac{1}{x+2^x}$ бесконечно малой?
3	Является ли непрерывной функция $f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{1}{x}} & \text{при } x\neq 0,\\ e & \text{при } x\neq 0?\end{cases}$
4	Найти $\max y(x)$ и $\min y(x)$ функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $x(t)=\ln\left(\sin\frac{t}{2}\right)$, $y(t)=\ln(\sin t)$
5	Является ли сходящимся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n^2}$?
6	Найти 3-ий коэффициент в разложении функции в ряд Маклорена функции $f(x)=x\sin^2 x$.
7	Найти длину кривой $r=2(1+\cos\varphi)$.

8	Укажите верные утверждения: а) если функция $f(x)\cdot g(x)$ имеет в точке x_0 предел. То функции $f(x)$ и $g(x)$ также имеют предел в точке x_0; б) если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она имеет производную в этой точке; в) если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке; г) если функциональный ряд сходится, то он сходится
9	Укажите не верное утверждение: а) $d^3y = y'''(x)dx$; б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x: \lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$; в) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$; г) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ сходится, если последовательность (a_k) монотонно убывает.

Примерный перечень вопросов к экзамену
(* отмечены вопросы, содержащие теорему с доказательством)

1 *Верхняя и нижняя грани числового множества.
2 *Лемма о вложенных отрезках.
3 Числовые последовательности, ограниченные и неограниченные последовательности.
4 *Бесконечно-малые последовательности и их свойства.
5 Бесконечно-большие последовательности и их связь с бесконечно малыми.
6 Сходящиеся последовательности и их свойства.
7 Предельный переход в неравенствах.
8 *Теорема Вейерштрасса сходимости монотонной ограниченной последовательности.
9 *Число e.
10 Подпоследовательности и принцип выбора.
11 *Фундаментальные последовательности, критерий Коши.
12 *Определение предела функции по Гейне и по Коши и их эквивалентность.
13 Односторонние пределы.
14 *Первый замечательный предел.
15 *Второй замечательный предел.
16 Бесконечно-малые функции, сравнение бесконечно-малых функций.
17 Непрерывность функции, классификация точек разрыва.
18 *Теорема об устойчивости знака непрерывной функции.
19 *Теорема Больцано-Коши о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.
20 *Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции на отрезке.
21 Равномерная непрерывность функции, теорема Кантора.
22 Сложная функция непрерывность сложной функции.
23 Обратная функция и непрерывность обратной функции.
24 Определение производной, геометрический и физический смысл производной.
25 *Дифференцируемость функции в точке.
26 Определение и геометрический смысл дифференциала.
27 *Производная обратной и сложной функции.
28 Производная и дифференциалы высших порядков.
29 *Теорема Ферма.
30 *Теорема Ролля.

31 *Теорема Лагранжа.

32 *Теорема Коши (обобщённая формула конечных приращений).

33 *Правило Лопиталя.

34 *Теорема Тейлора.

35 Локальные экстремумы функции и необходимое условие локального экстремума.

36 Локальные экстремумы функции и достаточные условия экстремума.

37 *Выпуклость и вогнутость функции.

38 *Точки перегиба функции, необходимое и достаточное условие перегиба функции.

39 Первообразная функции и ее свойства

40 Неопределённый интеграл и его свойства.

41 Основные методы интегрирования.

42 Интегральные суммы Дарбу, свойства верхних и нижних сумм Дарбу.

43 Определённый интеграл Римана и его свойства.

44 Существование определенного интеграла, критерий Дарбу.

45 *Теорема об интегрируемости непрерывной на отрезке функции.

46 *Теорема об интегрируемости монотонной на отрезке функции

47 *Теорема о среднем.

48 Интеграл с переменным верхним пределом, его непрерывность и дифференцируемость.

49 *Формула Ньютона-Лейбница.

50 Замена переменной в определённом интеграле.

51 Формула интегрирования по частям в определённом интеграле.

52 Несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом.

53 Несобственный интеграл от неограниченных функций.

54 *Признак сравнения сходимости несобственного интеграла.

55 Признаки сходимости несобственных интегралов.

56 Числовой ряд, сходимость числового ряда.

57 *Необходимое условие сходимости числового ряда.

58 *Интегральный признак сходимости числового ряда.

59 *Ряды с неотрицательными членами, признак сравнения.

60 *Ряды с неотрицательными членами, признак Коши.

61 *Ряды с неотрицательными членами, признак Даламбера.

62 *Знакочередующийся ряд, признак Лейбница.

63 Абсолютная и условная сходимость знакопеременного числового ряда, признаки Дирихле и Абеля.

64 Функциональная последовательность, поточечная и равномерная сходимость.

65 Функциональный ряд, поточечная и равномерная сходимость.

66 *Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

67 Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функционального ряда.

68 Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

69 *Степенные ряды, теорема Абеля.

70 *Теорема Тейлора о разложении в ряд Тейлора.

Типовые задачи к экзамену

1 Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4+2}$.

2 Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^k$.

3 Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^2-2x+5}$.

4 Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\,dx$.

5 Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{k!}(x-1)^k$.

6 Исследовать ряд на сходимость $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{5^k}$.

7 Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$.

8 Вычислить предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin x}{x}$.

9 Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k x^k$.

10 Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

11 Вычислить интеграл $\int_1^6\sqrt{x+3}\,dx$.

12 Вычислить интеграл $\int\frac{x^3+1}{x^2-1}dx$.

13 Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

14 Разложить функцию в ряд Маклорена $f(x)=\cos x^2$.

15 Исследовать ряд на сходимость $\sum_{1=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{5^k}$.

16 Найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = t^3 - t, \\ y = t \cdot \sin t. \end{cases}$

17 Вычислить предел $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$.

18 Вычислить предел $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x - 2}$.

19 Вычислить предел $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{n-2}{n+4} \right)^{n+1}$.

20 Вычислить предел $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$.

21 Исследовать непрерывность функции

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad x < -1, \\ x + 1 & \text{при} \quad -1 \le x \le 0, \\ -x^2 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

22 Исследовать функцию на непрерывность $y = x + \frac{1}{x^2 - 4}$.

23 Вычислить предел $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 6x + 3}$

24 Найти производную функции $y = (x+1)^x$.

25 Найти асимптоты графика функции $y = 2x + \frac{3}{x^2 - 1}$.

26 Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^{2k}}$.

27 Найти производную функции, заданной неявно $\cos y + xy = \sin(x^2 - 1)$.

28 Разложить в ряд Маклорена функцию $y = e^{x^2}$.

29 Вычислить производную 2-го порядка функции $y = x^3 + (x-2)^2 \ln(x+1)$ в точке $x = 0$.

30 Найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями $x = t \cdot \cos t$, $y = \sin t + t$.

31 Исследовать функцию и построить график $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

32 Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 x \ln x \, dx$.

33 Найти дифференциал функции $y = \dfrac{x^2+1}{\operatorname{arctg} x}$.

34 Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+1}$.

Литература

Основная

1 Демидович, В. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / В. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.

2 Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев.– М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

3 Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу : учебное пособие для вузов: в 3 ч. Ч. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин.– М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.

4 Математический анализ в вопросах и задачах : учебное пособие для вузов / под ред. В. Ф. Бутузова. – М. : Высш. шк., 1984.

5 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учебное пособие для вузов: в 3 ч. Ч. 1 / под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Выш. шк., 1991.

6 Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин – М. : Наука Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1988.

Дополнительная

1 Зверович, Э.И. Вещественный и комплексный анализ: учебное пособие для вузов: в 6 ч. Ч. 1. Введение в анализ и дифференциальное исчисление / Э. И. Зверович. – Мн. : БГУ, 2003.

2 Зорич, В. А. Математический анализ: учебник для вузов: в 2 ч. Ч. 1. / В. А. Зорич. – М. : Наука, 1981.

3 Ильин, В. А. Математический анализ : учебник для вузов / В. А. Ильин, [и др.]. – М. : Наука, 1979.

4 Никольский, С. М. Курс математического анализа: учебник для вузов: в 2 т. Т. 1. / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1983.

5 Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебное пособие для вузов / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1977.

Вопросы для самоконтроля

Определения

Что называется окрестностью точки z_0 ?

Дайте определение: а) предельной, б) внутренней, в) граничной точки множества $E \subset \mathbb{C}$.

Какое множество называется: а) открытым, б) замкнутым?

Какая функция называется комплекснозначной?

Какая кривая называется кривой Жордана?

Дайте определение связного множества.

Что называется областью комплексной плоскости?

Какая область называется: а) односвязной, б) многосвязной?

Какое направление обхода границы области называется положительным?

Сформулируйте определение числовой последовательности комплексных чисел.

Что называется пределом числовой последовательности комплексных чисел и какими свойствами он обладает?

Дайте определение функции комплексной переменной.

Какая функция называется: а) однозначной, б) многозначной, в) однолистной?

Как определяется действительная и мнимая части функции комплексной переменной?

Что называется пределом функции комплексной переменной?

Какая функция комплексной переменной называется непрерывной а) в точке, б) в области?

Какая функция называется равномерно-непрерывной?

Какие функции комплексной переменной называются элементарными?

Что называется производной функции $f(z)$ в точке?

Какая функция называется дифференцируемой в точке?

Что называется дифференциалом функции комплексной переменной?

Какая функция называется аналитической: а) в точке, б) в области?

Какие функции называются гармоническими?

Какое отображение называется конформным?

Какое направление движения по кривой называется: а) положительным, б) отрицательным?

Что называется интегралом от функции комплексной переменной?

Что называется первообразной для функции комплексной переменной?

Дайте определение неопределенного интеграла для функции комплексной переменной и запишите формулу Ньютона-Лейбница.

Какой интеграл называется интегралом типа Коши?

Сформулируйте определение ряда комплексных чисел?

Какой ряд с комплексными числами называется абсолютно сходящимся?

Какой ряд называется функциональным рядом?

Что называется точкой сходимости и областью сходимости функционального ряда?

Какой функциональный ряд называется равномерно сходящимся?

Какой ряд называется степенным?

Что называется: а) радиусом сходимости, б) кругом сходимости степенного ряда?

Какой ряд называется рядом Лорана?

Что называется областью сходимости ряда Лорана?

Какой ряд называется рядом Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки?

Какая точка называется нулем функции? Что называется кратностью нуля?

Какая точка называется изолированной особой точкой?

Какая изолированная особая точка называется: а) устранимой, б) полюсом, в) существенно особой?

Что называется вычетом функции?

Что называется логарифмическим вычетом?

Формулировки теорем и формулы

Сформулируйте критерий Коши существования предела функции комплексной переменной.

Сформулируйте необходимое и достаточное условия дифференцируемости.

По каким формулам вычисляется производная функции комплексной переменной?

Сформулируйте критерий конформного отображения?

Сформулируйте принцип симметриии Римана-Шварца.

Сформулируйте и докажите основную теорему Коши для многосвязной области.

Перечислите свойства интеграла от функции комплексной переменной.

По какой формуле осуществляется замена переменной в интеграле от функции комплексной переменной?

Какими свойствами обладает интеграл типа Коши?

Сформулируйте теорему Коши-Лиувилля.

Перечислите основные свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Доказательства теорем

Сформулируйте и докажите основную теорему Коши для односвязной области.

Сформулируйте и докажите теорему об интегральной формуле Коши.

Сформулируйте и докажите теорему Тейлора.

Вопросы и задачи на понимание

Для каких функций выполняются условия Коши-Римана?

Является ли аналитическая функция гармонической?

В чем состоит геометрический смысл модуля производной?

В чем состоит геометрический смысл аргумента производной?

В чем состоит различие между конформным отображениями 1- и 2-го родов?

В чем суть теоремы Римана?

В чем состоит принцип соответствия границ?

Как связаны интеграл от функции комплексной переменной по кривой и криволинейный интеграл 2-го рода?

Для каких путей интегрирования целесообразна замена $z - z_0 = re^{i\varphi}$?

В чем суть теоремы о среднем для функции комплексной переменной?

В чем состоит принцип максимума модуля аналитической функции?

В чем суть теоремы Морера?

Как исследовать ряд комплексных чисел на сходимость?

Какая сходимость функционального ряда сильнее: точечная или равномерная?

Когда можно почленно дифференцировать и интегрировать степенные ряды?

Как определяется ряд Тейлора для многозначных функций?

Как представима функция, имеющая нуль кратности m ?

Как влияет характер изолированной особой точки на вид ряда Лорана?

Как определяется особенность в бесконечно удаленной точке?

Как вычисляется вычет относительно:

а) устранимой точки;

б) простого полюса;

в) полюса порядка m;

г) существенно особой точки;

д) бесконечно удаленной точки?

Как для мероморфной функции вычисляется логарифмический вычет по контуру

Как вычисляются интегралы по замкнутому контуру?

Как вычисляются несобственные интегралы?

Как вычисляются интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$?

В чем суть леммы Жордана? Для каких интегралов она используется?

В каких случаях можно вычислить сумму ряда с помощью вычетов?

Учебное издание

Денисенко Тамара Андреевна
Марченко Лариса Николаевна
Парукевич Ирина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методический комплекс

В трех частях

Часть 1

Функции действительной переменной. Ряды

В авторской редакции

Подписано в печать 20.03.08. (93) Бумага писчая №1. Формат 60x84 1/16. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 19,1. Уч-изд. л. 14,8. Тираж 25 экз.

Отпечатано в учреждении образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104